CORSO
DI
GEOMETRIA
ELEMENTARE, E SUBLIME

AD USO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE DEL REGNO, E DELLA REALE ACCADEMIA DI MARINA.

DIVISO IN QUATTRO VOLUMI.

VOLUME I°.

Che contiene i primi sei Libri degli Elementi di EUCLIDE, con Addizioni; ed una Dissertazione sul Postulato V°.

I PRIMI SEI LIBRI

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

EMENDATI IN QUE' LUOGHI, IN CUI UNA VOLTA FURONO VIZIATI DA TEONE, O DA ALTRI; E NE' QUALI SONO RESTITUITE ALCUNE DEFINIZIONI, E DIMOSTRAZIONI DELLO STESSO EUCLIDE.

DA V. FLAUTI

Professore di Analisi Sublime nella Regia Università degli Studj di Napoli, Bibliotecario della Società Reale Borbonica, Socio e Segretario per le Matematiche della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell' Istituto d'Incoraggiamento, Membro Onorario della Società Reale di Coponaghen, e di altre Accademie, ec.

OTTAVA EDIZIONE

Optime illi mihi de Geometria meriti esse videntur, qui in antiquis auctoribus emendandis, illustrandisque operam posuerunt
TOR. Praef. in ARCH.

IN NAPOLI

Nella Stamperia al Palazzo Cariati num. 32.
1821.

primi sei libri, e sull'XI° e XII°, ed i luoghi ove esse corrispondono nel testo sono indicati col *V. N.* (*Vedi Note*). Tra queste ve ne ha principalmente una, che espone in succinto il XIII° Libro degli Elementi, che, come dice il nostro Autore, se da una parte non era necessario a recarsi negli Elementi ordinarj, non conveniva altronde di farlo restare affatto dimenticato.

Le suddette note porgeranno inoltre materia agli istitutori, onde inculcare negli animi de' loro allievi quei metodi, e quei principj, per mezzo de'quali lo spirito acquista prontezza ed attitudine al vero e rigoroso ragionar geometrico. E qui conviene avvertire coloro i quali faranno uso di questi Elementi per istruir la gioventù nelle scienze geometriche, che debbono essi, all'insegnamento delle verità e costruzioni contenute nel libro, accoppiare opportunamente quelle riflessioni atte a chiarire i loro allievi sul nesse delle teoriche elementari di Geometria, e nell' arte del definire, del dimostrare e dell' inventare. E dovranno essi farli anche esercitare nel dedurre dalle verità e costruzioni che avranno apprese nel libro quegli sviluppi, che facilmente se ne derivano; il quale esercizio, mentre che estende le conoscenze geometriche elementari de' giovani, prepara in essi lo spiri-

to d'invenzione. Or gli Elementi di Euclide pel loro metodo si prestano grandemente a tutte le anzidette cose; ed è perciò un dovere di coloro che istruiscono la gioventù, di non farle tralasciare a' loro allievi.

Per l'intelligenza delle citazioni basta l'avvertire solamente, che il numero arabo dinota la Proposizione, e 'l romano che segue, il libro cui appartiene. Sicchè per esempio (4. VI.) dinota la proposizione 4. del Lib. VI.

Conviene anche far quì notare che ove trovasi qualche luogo segnato con virgole al capoverso, ciò significa, che tal luogo vi si è conservato per seguire il Testo; ma che si potrebbe comodamente tralasciare, o almeno che non occorre per allora. Tal' è, per esempio, la definizione XIX. del Lib. I., ch' Euclide poi ripete tra quelle del Lib. III., ove sta più a proposito.

Compita con questi due volumi la parte elementare del Corso di Geometria, il terzo è destinato a trattare della precipua parte della Geometria Sublime, cioè della dottrina delle curve coniche. Questo trattato composto per ordine di teoriche, e con grandissima precisione e chiarezza, è quello stesso già altre volte pubblicato dal Sig. Ab. Giannattasio. E non vi sarà certamente chi possa contraddirci, se di-

remo, ch'esso è il migliore di quanti ne sieno usciti finora alla luce in questo genere. L'Autore, oltre alle ricerche sulla natura e proprietà di queste curve, ha voluto anche accoppiarvi la quadratura de' loro spazj, e le dimensioni de' rispettivi solidi di rivoluzione, il che ha eseguito in una maniera geometrica elegantissima.

Vi è premesso un lungo discorso col titolo di *Storia delle Sezioni Coniche*, nel quale espongonsi con non ordinaria dottrina i metodi co' quali la teorica di tali curve è stata dagli antichi Geometri e da' moderni trattata; e talvolta comparansi questi tra loro. Vi si ragiona di que' Geometri Greci che intorno alla dottrina di esse curve lavorarono, fino ad Apollonio, che compose otto libri sulle medesime; ed a questo proposito trattasi del *Luogo di risoluzione*, delle diverse opere ond'era composto, e quali di esse a noi pervenute, quali, sull'indicazione di Pappo, da' moderni geometri restituite, e quali in fine non ancora tentate.

Finalmente i giovani trarranno da questo discorso grandissimo profitto, in discernere con chiarezza la natura de' motodi di approssimazione per le dimensioni de' curvilinei in generale, che da Archimede in poi sono stati introdotti nelle Matematiche.

Il IV°. ed ultimo volume del presente Corso concerne le due Trigonometrie, e di esse sarà trattato in sei libri; il primo de' quali contiene la costruzione del canone trigonometrico, secondo le vie che somministra la Geometria, o la moderna Analisi elementare. Il secondo espone la Trigonometria Rettilinea, che vi è estesamente trattata, e nel modo più proprio per servirsene nella pratica. Il terzo libro contiene la teorica de' triangoli sferici, e le ricerche della loro misura. Il quarto ha per oggetto la risoluzione de' suddetti triangoli col metodo più facile e più sicuro: nessuna ricerca necessaria vi é tralasciata, e tra le altre cose le *Analogie Neperiane* si trovano in nuova facilissima guisa presentate. Finalmente il quinto e sesto libro riguardano, il primo di essi l'uso della Trigonometria in risolvere que' problemi geometrici, ne' quali le cose cercate debbonsi esibire in valore, e l'altro una serie di problemi, ne' quali la Trigonometria facilità grandemente il rinvenimento dell' equazione algebrica. Ma di ciò sarà detto più specialmente nell' Avvertimento premesso a questo quarto volume.

PRELIMINARE

AGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE.

Siquidem in omni scientiarum genere, nosse quibus gradatim incrementis adoleverint jucundissimum est, et ad rerum ipsarum intelligentiam plurimum confert
Horsley - *in Com. in Arith. Newt.*

Il risalire alle prime invenzioni in ogni scienza, per determinarne l'origine, e il nascimento, è un lavoro difficilissimo e vano. Ciò viene abbastanza comprovato dagli sforzi inutili di coloro, che hanno cercato di fissare l'epoca oscura, e tenebrosa de' primi passi dello spirito umano per fondare alcune verità geometriche semplicissime, o piuttosto per ridurre a principj teoretici quegli usi pratici di già rinvenuti per la misura delle grandezze, ch'erano necessarj per la vita civile. I germi di ogni scienza, o arte sono fecondati dal bisogno, ed essi possono perciò svilupparsi ad un tratto nelle menti di molti uomini, presentandosi loro in una maniera informe, e senza nesso alcuno, sicchè riesce

impossibile il dire: il tale ne fu l' inventore: questa fu la circostanza felice, che lo portò a fondar la scienza, che da un certo tempo ad un altro egli solo conobbe.

Ma se la storia non può somministrarci, che mere congetture, e forse veri sogni su i primordj delle scienze, essa può abbastanza metterci in chiaro giorno l' altra epoca in cui queste ridotte in sistema han cominciato ad essere insegnate, e scritte: e da quest' epoca in poi convien seguire passo a passo i progressi dello spirito umano, contribuendo ciò non poco alla miglior intelligenza delle scienze medesime, e riuscendo altronde piacevole il conversar con coloro, che furono i primi a sapere.

Convinti di ciò, noi non andremo cercando l' origine della Geometria in Egitto (1), nè in altro luogo; c'importa poco il sapere per qual ragione fu inventata, se Talete andò a Menfi per impararla, o pur se n' era già istrutto, e sarà sufficiente ad eccitar verso lui la gratitudine degli uomini il sapere, ch' egli fu lo scopritore di molte importanti verità geometriche. Noi cercheremo solamente d' indagare, chi furono i primi a ridurla in sistema scientifico; quale avanzamento essi prepararono alla scienza mediante le loro opere, e l' epoca fortunata in cui ciò avvenne.

È fuori di ogni dubbio, che la Geometria dovè

---

(1) Su tal proposito si troverà di che esserne ampiamente soddisfatto in molti discorsi premessi ad Elementi di Geometria; ma fia assai ben fatto, per chi amasse d' istruirsene, il leggere quanto relativamente a ciò dice il Signor Montucla nella sua dottissima Storia delle Matematiche: *Part. I. Lib. II. n. III.*

essere scientificamente trattata nella scuola di Pitagora, e che alcuna istituzione geometrica dovè a quell' epoca incominciarsi a scrivere, e ad insegnare. Un argomento irrefragabile di ciò, quando anche non esistessero quelle notizie informi, che ci sono state conservate da Proclo, lo abbiamo nel sapere, che Aristeo Seniore, il quale succedè in questa scuola al fondatore di essa (2), compose un' opera di Geometria sublime (3), dalla quale evidentemente si rileva, che la scienza era già adulta, e che altre opere geometriche avevano dovuto ad essa precedere.

Intanto niuna di queste è a noi pervenuta; nè perciò possiamo sapere il sentiero geometrico, che condusse Euclide (4) alla compilazione di un modello perfettis-

---

(2) Che Aristeo Seniore sia stato un filosofo Pitagorico, ed anteriore al divino Platone, si trova abbondevolmente dimostrato in una mia Dissertazione intitolata: *Esame geometrico dell'antico problema della trisezione dell' angolo*, la quale trovasi anche tra le Note del Vol. IV°. della sesta edizione del presente Corso, e della Trigonometria in 4.

(3) Sebbene quest' opera intitolata *Locorum Solidorum libri quinque* si sia perduta, pur tuttavia le indicazioni, che ce ne ha conservate Pappo Alessandrino, e la dotta divinazione che dietro queste ne ha data il Viviani, guarentiscono la profonda dottrina geometrica, che in essa si conteneva.

(4) Noi ignoriamo la patria di Euclide autore degli Elementi di Geometria, e quello che solamente ci rapporta Proclo si è, ch' esso visse ne' tempi di Tolomeo primo, e quindi che fu posteriore a coloro, che convissero con Platone. *Fuit autem iste vir primi Ptolomaei temporibus..... Platonis igitur familiaribus junior quidem est, antiquior vero Eratosthene et Archimede.* Egli è dunque

simo di scienza geometrica conosciuto col nome di *Elementi*. Il tempo però che ha distrutte queste tracce, per le quali lo spirito umano era giunto all'apice della sua perfezione, ci ha conservata la memoria di quegli uomini benemeriti, che le avevano segnate; ed è giusto, che anche noi gli facessimo conoscere.

Il primo di costoro di cui abbiamo notizia, è Ippocrate Chio, famoso per le sue *Lunule*; e tutto quello, che ce ne vien detto da Proclo si è, ch' egli ordinò i molti Teoremi, che Talete, Pitagora, ed altri prima di lui avevano scoperti; e fu perciò il primo autore, e scrittore di Elementi (5). Pare anche, ch' egli oltre all' aver raccolte tutte le verità geometriche da quelli scoperte, le avesse inoltre corredate di opportune dimostrazioni.

Il secondo di questi scrittori fu il geometra Leone, di cui altro non sappiamo, se non che egli compose più accuratamente gli Elementi di Geometria, e che aggiunse alla soluzione de'Problemi quella parte che chiamasi *Determinazione*, la quale mostra in quali casi il

---

ben diverso dall' Euclide Dialettico nativo di Megara, che lo precedè di circa un secolo, e col quale taluni scioccamente lo hanno confuso.

(5) *Primus namque eorum qui commemorantur Hippocrates Elementa conscripsit. Plato autem cum his successisset, fecit tum Geometriam ipsam, tum etiam caeteras Mathematicas disciplinas maximum suscepisse additamentum, propter ingens quod in ipsis adhibuit studium.... Hoc autem tempore fuit et Leodamas Thasius, et Architas Tarentinus, et Theaetetus Atheniensis, a quibus theoremata aucta sunt, ad peritioremque pervenere constitutionem.*

problema sia possibile, ed in quali altri impossibile (6).

Dopo lui Teudio, che Proclo ci rappresenta come un uomo sommo nelle Matematiche non solamente, ma benanche in tutto il resto della Filosofia, scrisse pure gli Elementi geometrici, e generalizzò le particolari invenzioni prima di lui fatte: che perciò egli vien riputato il terzo nell' ordine de' Padri nelle scienze Matematiche (7).

Il quarto tra questi fu Ermotimo Colofonio, che stabilì, come ci vien rapportato, una nuova disciplina

---

(6) *Leodamante autem junior Neoclides fuit, hujusque discipulus Leon, qui ad ea quae superiores excogitaverunt multa addiderunt. Ita ut Leon Elementa quoque construxerit accuratius, et propter multitudinem, et propter usum eorum quae in ipsis ostenduntur, et determinationem invenerit, quando scilicet quod quaeritur problema possibile sit, et quando impossibile. Eudoxus autem Cnidius Leonte quidem paulo junior, sodalis vero Platonis, primus multitudinem eorum theorematum, quae universalia appellantur, locupletiorem reddidit.*

Ad Eudosso si attribuisce l' importante teorica della proporzione delle grandezze, da Euclide si mirabilmente esposta nel lib. V.; e ciò mostra evidentemente, che gli Elementi di Geometria furono fino a quest' epoca imperfetti nella loro parte più importante.

(7) *Theudius autem Magnes, tum in mathematicis disciplinis, tum etiam in reliqua Philosophia praecellere visus est. Elementa namque construxit egregie, multaque particularium magis universalia fecit.*

Par dunque, che l' opinion di Proclo sia, che questo Geometra fosse stato il primo a trattar gli Elementi in una maniera completa, e rigorosa.

geometrica elementare (8); e questa novità non potè certamente consistere in altro, che nella diversa maniera d' ordinare, e di dimostrare le verità geometriche nel suo libro contenute.

Finalmente tutte queste opere prepararono la strada ad Euclide per comporre i suoi Elementi, ne'quali comprese molte delle invenzioni di Eudosso, e di Teeteto; e con dimostrazioni solidissime, contro le quali non v' ha scetticismo che valga, convalidò molte verità geometriche, che da' loro inventori, e dagli altri allegati scrittori elementari erano state negligentemente trattate (9).

Parve che quì lo spirito umano si riposasse. La ragion dell' uomo fu paga di veder ridotta la scienza in un sistema, del quale era impossibile l'immaginare un altro migliore; e senza più occuparsi i geometri greci della perfezione degli Elementi già ottenuta, si rivolsero con avvedutezza a far progredire le Matematiche. Così operarono que' nostri avveduti maestri, i quali pretesero di acquistare una solida gloria, e di promuovere l'avanzamento delle scienze. La Grecia non produsse più ope-

---

(8) *Hermotimus autem Colophonius, quae ab Eudoxo, et Theaeteto prius edita fuerant, uberiora fecit, compluraque invenit Elementa, locosque nonnullos conscripsit.*

(9) *Non multo autem his junior Euclides est, qui Elementa collegit, et multa quidem construxit eorum quae ab Eudoxo: multa vero perfecit eorum, quae a Theaeteto reperta fuerant. Ea praeterea, quae a prioribus molliore brachio ostensa fuerant, ad eas redegit demonstrationes, quae nec coargui, nec convinci possunt.*

re geometriche elementari, contenta de' soli Elementi di Euclide (10).

Questo debito rispetto, ch' ebbero di una tale opera i geometri greci, passò coll' opera stessa, nel risorgimento delle scienze, in Italia presso i più distinti Matematici, de' quali questo felice tratto di terra fu assai fecondo; e dall' Italia passando le scienze geometriche presso le altre nazioni, queste l' accolsero pure col rispetto stesso. Tutta l' Europa fu addottrinata dagli Elementi di Euclide, ed essa produsse de' sommi Matematici, alle cui rispettabili fatiche or dobbiamo tutta quella massa di sublimi cognizioni matematiche, che fa veramente maraviglia. La sola Francia non trovò bello un libro che spirava solamente rigore; e perciò Euclide non ebbe presso questa nazione, che pochissimi ammiratori nella persona di uomini sommi, e nelle scienze matematiche versatissimi, e molti novatori. Una folla di Elementi scritti con metodo diverso dall' Euclideo si videro comparire presso questa nazione, succedendosi nelle scuole con vita brevissima gli uni agli altri, e quest' esempio finalmente dopo lunga età passò anche in Italia, la quale dimenticando ch' essa un dì n' era stata maestra, volle prendere in prestito una scienza travestita. Nè questo furore di Elementi è ancora cessato, sebbene siasi af-

(10) Che in Grecia non sieno comparsi altri Elementi dopo quelli di Euclide si deduce chiaramente dal vedere, che Proclo il quale ci ha tramandata la notizia di coloro che precedettero quel geometra in questo genere difficilissimo di lavori geometrici, non ci dice poi nulla che altri lo avessero seguito; e pur di questi poteva egli averne miglior contezza, che de' primi.

fievolito non poco : il tempo però distrugge di giorno in giorno le opere di questi novatori , e colle loro opere cancella interamente il loro nome.

Dopo questa breve digressione , ritorno agli Elementi di Euclide, per esporre il piano ch' ebbe il loro autore nel comporli ; il che è necessario non solamente per istabilire alcuni punti importantissimi di Storia Matematica ; ma anche per dare a'giovani contezza di alcuni libri, che formano parte di quest'opera , e che ora non vengono più insegnati, ma de'quali conviene avere un'idea. Recherò inoltre un saggio delle principali edizioni di Euclide in greco , ed in latino ; parlerò del loro merito , o de'loro difetti , e de' principali comentarj che sopra esso si sono fatti. Esporrò finalmente gli autorevoli giudizj de' principali Matematici antichi , e moderni dintorno ad Euclide. Lo spirito umano è così fatto , che anche dov' ei può chiaramente vedere, ama di esser guidato , e vuol sentire ciò , che gli altri ne pensano.

ESPOSIZIONE
DEGLI ELEMENTI
DI EUCLIDE

Gli Elementi di Euclide sono divisi in XIII. libri, de' quali i primi due trattano della natura, e delle proprietà de' triangoli, e de' parallelogrammi, con le verità che a queste figure sono correlative, ed i problemi che ne dipendono: il III° tratta del cerchio, ed il IV° di alcune figure regolari inscrittibili, e circonscrittibili ad esso co' metodi della Geometria Elementare. Nel V° si esamina la grandezza in generale paragonata ad un' altra; e questo libro, che per incidenza trovasi compreso tra quelli di Geometria Elementare, non appartenendo ad essa esclusivamente, è un' immensa miniera di ripieghi geometrici, onde risolvere infiniti ardui Problemi, e per dimostrar molte verità complicate, che invano si tenterebbero altrimenti. Esso forma in somma la base de' metodi di risoluzione impiegati dagli antichi nello scioglimento de' problemi, e nella dimostrazione de' Teoremi. Finalmente nel VI° libro si trovano applicate le teoriche generali esposte nel V° a' rapporti speciali, che serbansi tra loro le diverse figure piane rettilinee, per mezzo de' quali moltissimi Problemi dintorno a queste figure si possono facilmente risolvere.

Esaurita in tal modo questa parte di Geometria, che riguarda le figure piane, par ragionevole ch' Euclide avesse dovuto passare ad occuparsi delle stesse ricer-

che pe' solidi. Intanto queste altre teoriche, nell' esemplare Greco di Teone, nelle versioni in Arabo, e presso tutti gli antichi, e moderni espositori degli Elementi trovansi comprese nell' XI°, XII°, e XIII° libro, e tra quelli e questi vi sono frapposti quattro altri libri, de' quali i primi tre, cioè il VII°, VIII°, e IX° trattano di alcune teoriche generali, ed astratte concernenti la quantità discreta, cioè i numeri. E questi libri che oggidì, dopo l' invenzione della volgare Aritmetica, e della speciosa sono poco letti, contengono profonde dottrine, ed utili teoremi per coloro, che si occupano delle ricerche aritmetiche. Si trovano in fatti dimostrate in essi molte verità, e risoluti alcuni Problemi in una maniera preferibile a quella, che taluni valentissimi Analisti hanno tenuta nelle loro opere, valendosi delle immense risorse, che offre in simili ricerche l' Analisi moderna. Nel X° libro poi si ragiona estesamente delle quantità incommensurabili, ed irrazionali, e con tale profondità, che senza dubbio alcuno può dirsi, che forse con tutt' i moderni metodi sarebbe difficile a chiunque, il poter con pari precisione, chiarezza e brevità fare altrettanto. Ecco però di questi libri un' indicazione un poco più estesa.

Il VII° libro ha 41 proposizioni, delle quali 35 teoremi, e 6 Problemi. Que' teoremi espongono la natura de' numeri *primi*, e molte proprieta riguardanti il rapporto de' numeri, analoghe a quelle, che per la grandezza in generale si erano dimostrate nel libro X°; e nella Prop. 16, con una precisione desiderata in qualche moderno Analista si dimostra, che: *non varia il prodotto di due numeri, sia che l' un di essi si mul-*

tiplichi per l' altro, *o questo per quello* (11). I Problemi poi di questo libro hanno per oggetto il: *rinvenire la massima comune misura di due*, *o più numeri dati non primi tra loro* (e questa ricerca è condotta a fine in un modo analogo a quello di cui ci serviamo nella nostra volgare Aritmetica, e nella speciosa): inoltre han per oggetto: *la minima comune misura*; il *determinare tra tutt' i numeri che hanno un dato rapporto*, *quelli che sono primi tra loro*; e finalmente il, *ritrovare un numero minimo*, *che abbia parti date*.

L' VIII° libro contiene 15 Teoremi, e 2 Problemi. Ne' Teoremi Euclide comprende le ricerche su i numeri primi, espone alcune altre singolari proprietà sulla proporzione de' numeri, quelle de' numeri *piani*, e *solidi*, e de' numeri *quadrati*, e *cubi*, le definizioni de' quali erano state da lui premesse al libro VII°; e tra questi teoremi merita principalmente d' esser notato il 5°, ove si dimostra, che i *numeri piani hanno tra loro una ragione composta dalle ragioni de' lati*, dal che il Simson ha ricavato un sicuro argomento per conchiudere, che non è di Euclide l' ordinaria definizione della ragion composta, che trovasi al principio del lib. VI. (*Veg. la nostra nota alla def.* A *del lib. V*). Ne' due Problemi poi si propone egli di: *rinvenire de' numeri minimi continuamente proporzionali*, *la ragion de' quali sia data*, *e de' numeri minimi in con-*

---

(11) Si può vedere una tal dimostrazione compendiata nell' *Introduzione al I.° Volume del nostro Corso di Analisi Elementare e Sublime.*

tinua proporzione, che serbinsi qualunque ragioni date tra numeri anche minimi:

Continua nel libro IX°, che ha 36 Proposizioni, cioe 34 Teoremi, e 2 Problemi, ne' primi ad esporre la natura de' numeri quadrati, e cubi, ed alcune altre proprietà della proporzione de' numeri, e de' numeri primi. Tra questi è degno della massima avvertenza l' ultimo, in cui dimostra, che: *se dall' unità in poi si prendano de' numeri continuamente proporzionali in ragion doppia, finchè quel numero, che risulta dalla somma di tutti questi termini sia primo; una tal somma multiplicata per l' ultimo di que' numeri proporzionali, darà per prodotto un numero perfetto*, cioè *uguale a tutte le sue parti prese insieme* (12); la qual verità, che fa molto onore al geometra antico che ne fu l' inventore, trattata anche co' nostri mezzi attuali, dice bene il Sig. Montucla, esige un artifizio particolare (13). L'oggetto poi de' due Problemi di questo libro si è il: *determinare se possa rinvenirsi dopo due numeri dati il terzo proporzionale, o il quarto dopo tre.*

Finalmente il libro X° tiene 117 Proposizioni, e 93 di esse Teoremi, ne' quali si espongono i caratteri delle quantità *incommensurabili*, e delle *commensurabili* (14); ove tra le altre cose si dimostra, che il rap-

(12) *Def. 22. VII.*

(13) Il Sig. Montucla nel parlare di una tal ricerca la presenta come un problema di Euclide, mentre questo geometra la espone in forma di teorema enunciato come quì sopra.

(14) Il concetto di tali grandezze viene da Euclide chiara-

porto di queste sia esprimibile in numeri, e non così quello delle prime; e lo stesso pe' quadrati e cubi, che da tali quantità si formano; e da ciò poi egli deduce le seguenti rimarchevoli verità, cioè che: *le linee rette commensurabili in lunghezza, lo sono anche in potenza*, cioè ne' quadrati e ne' cubi; ma che al contrario *quelle linee rette, che sono commensurabili in potenza, non lo sono sempre in lunghezza*: di più, che *le linee rette incommensurabili in lunghezza, non lo sono sempre in potenza*; che *quelle poi, che sono incommensurabili in potenza debbono esserlo anche in lunghezza* (15). In seguito passa a trattare delle quantità irrazionali (16), e dalla teorica che su queste stabilisce ricava nuove verità per le quantità incommensurabili. In somma sono tante le cose da Euclide dimostrate in questo libro, che sarebbe ecceder di molto i limiti di una semplice indicazione, il volerle qui minutamente notare; che perciò ci ristringeremo ad osservare solamente, ch'egli chiude un tal libro col dimostrare, che: *la diagonale, ed il lato del quadrato sono incommensurabili tra loro*, e ciò viene da lui eseguito con un artifizio veramente maraviglioso. Egli fa ve-

---

mente stabilito nelle definizioni 1 e 2 del Libro X°.; e nelle seguenti sono caratterizzate le differenti specie, ed i diversi ordini d'incommensurabili, e le quantità così dette *razionali*, ed *irrazionali*. L'esistenza di queste grandezze in Geometria, che vien da Euclide comprovata nel presente libro, come si dirà in avanti, rende nullo ogni concetto aritmetico per istabilire l'uguaglianza delle ragioni.

(15) *Cor. Prop.* 9. *X.*

(16) *Teor.* 27. *e segg.*

dere, che acciocchè potesse esprimersi un tal rapporto da quello di un numero ad un altro, bisognerebbe che un numero fosse nel tempo stesso pari, ed impari: il che è impossibile. Ed a questo proposito, con molto giudizio così ragiona il Sig. Montucla: » Io non so se la » dimostrazione diretta, poichè ve ne ha una, sia tanto convincente quanto il ripiego preso da Euclide; e » per questa ragione mi sembra, che quelli, i quali » nelle loro edizioni di Euclide hanno così cambiata la » sua dimostrazione, hanno avuto torto. Che che ne sia, » ho vedute molte persone, anche istruite in Geome- » tria, non dar per dimostrazione di quest' incommen- » surabilità, che l' impossibilità di estrarre la radice » quadrata dal 2, per mezzo dell' approssimazione in » decimali. Ma chi è colui che ha ancora provato, che » quest' approssimazione sia interminabile? Ed io ho co- » nosciuto un uomo, che faceva l' architetto ostinarsi a » continuarla, sperando sempre di giugnere ad un ri- » sultamento esatto. Quanti stenti si avrebbe risparmia- » ti, se avesse letto e capito Euclide (19)! Inoltre la dimostrazione di Euclide contiene in fine alcune applicazioni, che in taluni codici antichi si trovano esposte in uno Scolio separato; e in questo pezzo finale, o Scolio si comprendono altri esempj di quantità incommensurabili presi tra le figure piane, e solide; ma di ciò avremo occasione di parlare più appresso. Intanto per

---

(16) *Histoire des Mathematiques Part. I. lib. IV. n°. II.*, Per una dimostrazione procedente a questo modo, è degna di esser letta quella del Sig. Lhuillier, da me anche recata negli Elementi di Analisi Algebrica.

non tralasciar di dire qualche piccola cosa de' Problemi, che risolvonsi in questo libro X°. noteremo solamente, che tra le altre cose si cerca la massima comune misura di due, di tre, o più quantità commensurabili: di più certe linee incommensurabili in lunghezza, ed in potenza, con certe condizioni date; le quantità così dette *medie*, commensurabili in potenza solamente, le quali contengano un razionale, o un medio *ec.*

Prima di lasciar quest' argomento, proporrò per digressione una non inutile congettura. L' anello di connessione tra l' Aritmetica, e l' Algebra sono state, come tutti sanno, le quistioni indeterminate proposte su i numeri; ed i libri VII°. VIII°. e IX°. degli Elementi mostrano ad evidenza, che sin da' primi tempi della Geometria molto si era fatto intorno ad esse. Or se è così, e se noi troviamo in Euclide adombrato l'uso delle lettere alfabetiche per dinotare sì le quantità note, che le incognite de' Problemi aritmetici su' numeri indeterminati; perchè non potrem giustamente dire, che l'introduzione de' simboli nella nostra Aritmetica speciosa abbia avuto un tipo in questi libri Euclidei, ne'quali si trova evidentemente praticata? E se è così, nè il Francese Vieta, nè alcuno de' nostri Italiani può dirsi a rigore l' autore di quest' importantissima scoperta; e tutto al più potrà loro attribuirsi il merito di aver stabilita la regola, e fissata la maniera di usarne. Ma non è questo il luogo d'insistere sulla probabilità di ciò che quì si è asserito, e di che mi riserbo a parlare con più estensione nell' Introduzione al primo volume del mio Corso di Analisi. Mi giova quì solamente far notare, che lo stesso Cossali nel 2°. Capitolo della sua elaboratissima opera intitolata *Origine, e trasporto dell' Algebra in I-*

talia, sebbene muova qualche lieve difficoltà sull' addotta opinione; non ha poi potuto fare a meno di conchiudere: » In somma per quanto si usi restringimento, » non si può negare, che il libro quinto degli Elemen» ti sia per la massima sua parte un modello da Eu» clide dato di generica, o geometrica, se si vuole, » dottrina in astratte spezie letterali; e che i libri » VII°, VIII° e IX° ne sieno uno simile di astratte » letterali spezie di dottrina aritmetica.

Qual sia l' oggetto dell' XI°, e del XII° libro, si è già detto di sopra: la teorica de' solidi si trova in essi saldamente stabilita, ed in modo da non lasciar cosa alcuna a desiderare per l' ordine ammirabile con cui è scritta. Intanto non bisogna negare, che in alcune definizioni dell' Libro XI. non si riconosce quell' istessa precisione, ch' è propria di Euclide, e che tanto ammirasi ne' primi sei libri; e vi è anche qualche dimostrazione, che non persuade interamente i Geometri rigorosi. Queste imperfezioni però non pare che debbano attribuirsi all' accuratissimo Euclide; ma piuttosto che sieno state prodotte nella sua opera da mano men perita di qualche antico espositore degli Elementi, per l'ambizioso desiderio d' innovare. Le principali di esse s' incontrano nelle definizioni 9, 10 ed 11 del Libro XI., cioè in quella de' solidi simili, degli uguali e simili, e dell' angolo solido; perchè la prima e terza di queste sono alquanto vaghe e dubbiose, e la seconda non è già una definizione, ma un teorema da dimostrarsi (*Vegg. le Note corrispondenti a queste definiz.*). Ciò facendosi la dottrina de' solidi uguali e simili, anzichè trovarsi *fondata sopra un principio che vacilla*, co-

me sottilmente ha preteso il Simson (18), sarebbe solidamente stabilità, e con tutto il rigor che si esige in un libro elementare di Geometria. Questi due libri aveano di più bisogno di essere esposti con maggior chiarezza; e molte dimostrazioni, e soluzioni dovevano rendersi più brevi, affinchè riuscisse più facile a' principianti il ritenerle. Or io mi lusingo che l' una e l' altra delle suddette cose siasi conseguita in questi nostri Elementi

Il Libro XIII. degli Elementi trovasi riportato in poche istituzioni di Geometria, e con ragione, non contenendo una dottrina importante ad apprendersi da un giovine principiante. Altronde un tal libro non cessa di essere un buon libro di dottrina Geometrica, e perciò non doveva restar interamente dimenticato. Ho quindi creduto opportuno di conciliar queste due cose, dandolo in abbozzo in una Nota al libro XI°, dalla quale si potrà ricavare una completa idea di ciò che Euclide ha esposto in tal libro, ch' è tra quelli della Solida, come il IV° tra i libri della Piana.

Ordinariamente questo libro XIII° trovasi seguito da due altri, che trattan pure de'corpi regolari. Le teoriche però ch' essi contengono, sono interamente superflue per gli Elementi di Geometria; nè sono di Euclide, ma d' Ipsicle Alessandrino, e furono essi male a proposito aggiunti a' primi tredici libri di quel Geometra, da Teone, o da altro antico comentatore. Con tutto ciò anche i più accurati tra i moderni espositori di Euclide gli hanno conservati in questo luogo. Quel-

(18) Si riscontri la Pref. al suo Euclide.

lo che fa veramente maraviglia si è il vedere, che taluni abbian potuto sospettare, che questi due libri potessero appartenere ad Euclide. Primieramente dimostra il contrario la Prefazione ad essi, nella quale si parla di rettificare ciò che Apollonio Pergeo, il qual visse dopo di Euclide, aveva scritto sul paragone del dodecaedro all' icosaedro inscritto in una stessa sfera; e poi la loro esposizione mostra evidentemente a chi ha un poco il gusto Euclideo, ch'essi siano usciti da altra mano meno perita, che quella di Euclide.

Intanto nel trovarsi i libri della Solida di Euclide distinti da quelli della Piana, per mezzo del VII°, VIII°, IX° e X° de' quali si è parlato, dee far necessariamente pensare ad ognuno, che questi libri sieno preliminari necessarj alla scienza de' solidi: ed in fatti questa opinione hanno avuta molti sommi Geometri, tra i quali il Clavio, ed il Gregory. Il primo di essi nella introduzione da lui premessa al libro VII°, si esprime così: *Hactenus egit Euclides de priori Geometriae parte, ea scilicet quae circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, et incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime quae regularia nominantur demonstrandas, atque ut oportet explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, ut absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis, plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriae theoria in opus conferatur atque usum, neque exprimi queant, neque intelligi* . . . .

Et quia earundem linearum explicatio ac intelligentia cum numeris est implicata, et conjuncta, ut absque his nullo modo cognoscantur, oportuit etiam numerorum explanationem, ut doctrinae suus ordo ratioque constaret, lineis anteponi. Nel cominciare poi il libro X° lo stesso Clavio dice: *Absolvit Euclides in antecedentibus tribus libris ea quae ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas; nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium et incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum, complures magnitudines cum solidae, tum planae, neque perfecte intelligi possunt, neque, cum res tulerit, in opus atque usum conferri, propterea quod plerumque latera earum incommensurabilia sunt: id quod et de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum et haec incommensurabilia saepe numero existant; ut ad finem hujus libri demonstravimus.* Ed il Gregory nella Prefazione al suo bellissimo Euclide greco-latino ragiona sopra di ciò nel seguente modo: *Proprie tamen Geometria haec dividitur in* επιπεδων θεωριαν *(superficierum contemplationem), et* στερεομετριαν *(solidorum). Sed* στερεομετρια *intelligi nequit sine notitia linearum* συμμετρων; *et* ασυμμετρων: *nec hanc scire possumus, nisi notitiam habeamus numerorum.* Questi due sommi Geometri, e con essi molti altri, voglion dunque darci chiaramente ad intendere, che la dottrina de' numeri, e quella delle grandezze incommensurabili sia essenziale a premettersi all' altra de' solidi: se è così ognuno dovrebbe aspettarsi di veder continua-

mente citate le proposizioni del VII°, VIII°, IX° e X° libro nell' XI°, e nel XII°; e pure, se se n'eccettua la prima del libro X°, che ha servito ad Euclide di lemma ad alcune proposizioni del XII°, e che anche nel luogo ove si trova vi sta come lemma, non facendo affatto parte delle ricerche del libro X°, non v' ha alcun' altra dimostrazione, o soluzione ne' libri della Solida, che ammetta in verun modo l' esistenza dei quattro libri intermedj. E ciò tanto è vero, che in nessun Corso moderno di Geometria elementare Euclidea, non escluso quello del Simson, si trovan più questi libri; ed il Borelli nel suo *Euclides Restitutus* stimò a proposito di esporre le dottrine comprese in essi, dopo di aver trattato completamente di quelle, che riguardavano la Geometria. E se nel solo libro XIII° si trova fatta una qualche applicazione delle teoriche del lib. X°, sopra di che hanno dovuta fondare la loro opinione il Clavio, il Gregory, e quelli altri Geometri, che intorno a questo assunto hanno pensato com' essi; conviene però riflettere, che le cose che hanno bisogno di un tal ajuto non formano l' essenziale di questo libro: e poi una sì fatta applicazione può benissimo accordasi colle congetture, che ora esporrò su questi quattro libri elementari. In oltre se le teoriche d' incommensurabilità debbon premettersi a quelle de' solidi; perchè non dovranno ugualmente premettersi alle altre delle figure piane, che pur possono essere commensurabili ed incommensurabili? Ma vi è anche un' altra cosa da osservare, ed è questa: Nell' ultima proposizione del lib. X°, come si è già detto, Euclide dopo di aver dimostrato in due modi diversi, che la diagonale ed il lato del quadrato sono incommensurabili tra loro, continua a dire così:

Itaque inventis longitudine incommensurabilibus rectis lineis, ut A, B, invenientur et aliae quamplurimae magnitudines ex duabus dimensionibus, nimirum superficies incommensurabiles inter se se. Si enim inter ipsas A, B, mediam proportionalem sumamus rectam lineam C; erit ut A ad B, ita figura quae fit ex A ad eam quae ex C similem, et similiter descriptam, sive quadrata, sive alia rectilinea similia, sive circuli qui circa diametros A, C describantur, quandoquidem circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata. Inventa igitur sunt spatia plana inter se incommensurabilia. Ostensis autem his, ostendemus etiam ex solidorum contemplatione ipsa solida esse commensurabilia et incommensurabilia inter se se. Nam si in quadratis ex A, B, vel in rectilineis quae ipsis aequalia sint, solida aeque alta constituamus, sive parallelepipeda, sive piramides, sive prismata, erunt ea inter se uti bases; et si quidem bases commensurabiles sint, erunt solida commensurabilia, si vero incommensurabiles, et ipsa incommensurabilia erunt... Sed et duobus circulis existentibus A, B, si in ipsis conos aeque altos, sive cylindros constituamus, erunt inter se uti ipsorum bases, hoc est ut A, B circuli; et si quidem circuli commensurabiles sint, commensurabiles erunt et coni inter se se, et cylindri; si vero incommensurabiles, et coni, et cylindri incommensurabiles erunt. Ex quibus perspicuum est, non solum in lineis et superficiebus esse commensurabilitatem, et incommensurabilitatem, sed et in solidis figuris. Ma chi non vede chiaramente da tutto ciò, che il libro X° non possa stare innanzi all'XI° e XII°; mentre

nel citato luogo di esso vi si accenna pressochè l'intera teorica del rapporto delle figure solide. Il Gregory avendo sostenuto, che questi libri erano posti nel loro luogo, ha dovuto poi necessariamente ricorrere al ripiego di dire, che le cose quassù riportate nello Scolio, *o non sono di Euclide, o almeno non debbono stare in questo luogo, poichè dipendono dalle cose seguenti* (18). Ma, senza derogare al rispetto che si dee ad un Geometra del suo merito, egli si è fortemente ingannato. Primieramente non v'ha ragione da dubitare, che queste cose sieno di Euclide, quando si ammette che sia sua la proposizione con la quale sono strettamente connesse; e poi è ben conseguente e ragionevole, ch'Euclide, dopo di aver sì a lungo ragionato delle quantità commensurabili, ed incommensurabili, volesse provare con più esempj geometrici l'esistenza di queste ultime grandezze, non solamente tra le figure piane, ma anche tra le solide. Nè men può dirsi, che quello Scolio non sia nel suo luogo; poichè quale altro gliene potrebbe competere negli Elementi? Il Gregory dunque si è fatto indurre in equivoco dall'impegno in cui era entrato di sostenere ciò, ch'egli aveva asserito nella Prefazione.

Inoltre l'uso stesso, che potevano avere questi libri in Geometria, ci dimostra, ch'Euclide non abbia mai potuto collocarli in quel luogo nel quale si trovano. Imperciocchè ognun comprende, che gli antichi non do-

(18) Si riscontri la noterella da lui inserita a piè della pagina 327 del suo Euclide.

vevano studiar con tanto impegno le cose geometriche per un puro lusso letterario; ma sì bene per l' utilità, ch' esse recano negli usi civili, per servirsene cioè in pratica; e questi libri dovevano essere senza verun dubbio destinati a ridurre in pratica le ricerche geometriche della Piana e della Solida, la qual cosa vien chiaramente dimostrata dalle dottrine che vi si espongono. E se tanto caso si vede in essi fatto della teorica degl' incommensurabili, ciò proviene in parte dalla mancanza presso gli antichi di metodi aritmetici di approssimazione, per cui prima d' imprendere un' operazione pratica dovevano assicurarsi della qualità delle grandezze sulle quali operavano, ed in parte dal sommo rigore e dall' esattezza, ch' essi mettevano in tutte le loro cose. Che fosse questo l' uso di tali libri, lo accenna anche il Clavio ne' due luoghi allegati.

Or posto ciò, perchè mai un trattato che serviva a ridurre in pratica le teoriche della Piana, e della Solida doveva seguire gli Elementi della Piana, e precedere quelli della Solida? Esso avrebbe dovuto certamente seguire, o precedere agli uni, ed agli altri. Vi è di più, che siccome nel VII° libro si ragiona de' numeri *quadrati* e *cubi*, ed abbiamo già de' primi un' idea di corrispondenza geometrica, l'istessa idea conveniva formarsi de' secondi. Ed in qual maniera poteva ciò effettuarsi facendo precedere questi libri agli Elementi della Solida? E lo stesso dicasi pe' numeri *piani* e *solidi*.

Da quanto si è detto pare, che si potrebbe conchiudere, che il VII°, VIII°, IX° e X° libro, anzichè precedere l' XI°, XII° e XIII°, dovrebbero star dopo questi; ma io congliietturo, e non senza qualche fonda-

mento, che questi quattro libri non furono da Euclide compresi in un'opera sola cogli Elementi Geometrici, e che formarono un trattato diverso, il qual s'insegnava a' giovani unitamente agli Elementi di Geometria, appunto come si costuma oggigiorno di accoppiare allo studio di questa scienza quello dell'Aritmetica, e dell'Algebra. Ed ecco i motivi di una tal mia opinione.

Ciò che dee caratterizzare una buona istituzione elementare di Geometria, si è certamente il non trovarvi alcuna interruzione nella catena delle verità necessarie, che vi si contengono, senza che peró alcuna ve n'abbia superflua, o pur due volte esposta; e non v'ha certamente alcuno il quale conosca questa specie di lavori geometrici, che di ciò non convenga. Perciò se Euclide si acquistò per gli suoi Elementi la riputazione di *Geometra accurato* (19) presso gli antichi Matematici, bisogna dire, ch'egli abbia rigorosamente osservato un tal precetto nell'ordinarli. E certamente non avrebbe avuto alcun dritto a questo titolo, quando si volesse presupporre, che il VII° libro, e gli altri sino all' XI°. facessero parte de' suoi Elementi; imperocchè in quel libro si trovano dimostrate pe' numeri le stesse verità da Euclide fatte rilevare per le grandezze in generale, e quindi anche pe' numeri nel libro V°. In fatti qual necessità v' era di dimostrare, che: *Se un numero sta ad un altro, come una parte del primo ad una parte del secondo, stia pure il rimanente del primo al*

---

(19) Così lo chiama Pappo Alessandrino nella prefazione al Lib. VII° delle Collezioni Matematiche, e poco dopo soggiugne *neque usquam deceptus est.*

rimanente del secondo, come quel numero a questo, se ciò era contenuto nella Prop. 19. del libro V°? Di più, che: *Se quattro numeri sono proporzionali, permutando sono anche proporzionali*? La qual verità vien dimostrata generalmente nella proposizione 16 del libro citato. In una parola le proposizioni 11, 12, 13, 14, e 22 del libro VII° non sono che ripetizioni delle altre 11, 12, 16, 22, 23 del lib. V° particolarizzate.

Si potrebbe anche provare facilmente, che negli altri libri, e principalmente nel X° vi sieno altre verità, che affatto non avrebbero dovuto dimostrarsi in questo libro, se esso avesse formata una continuazione di teoriche col libro VI°.

Ma concedendosi ancora, che convenga dimostrar nuovamente i casi particolari di una teorica generalmente esposta, quando si tratta specialmente di essa; si dimanderà perchè Euclide, il quale ha posto tanto sistema, ed uniformità nelle sue cose, avrebbe fatta questa eccezione per la teorica de' numeri, la quale non entrava, che accidentalmente nel piano de' suoi Elementi, ed avrebbe poi tralasciato di ciò fare per le grandezze continue nel libro VI°? Se dunque vogliamo riconoscere in Euclide il carattere di esattezza, che riluce in tutte le sue cose, e se non vogliamo distruggere male a proposito l'opinione di tutt'i Geometri antichi a suo riguardo, bisogna convenire, che senz' altro questi quattro libri formavano, come si è detto, un'opera separata interamente dagli Elementi di Geometria, la quale s'insegnava forse nelle Scuole Greche nel medesimo tempo che quelli. Ciò posto questi libri non solamente non debbono esser compresi nell' ordinaria istituzione; poi-

chè per le dottine che contengono, sono superflui per noi, che possediamo l' Aritmetica volgare, e la speciosa; sebbene non bisogna negare, che vi sieno in essi, come sopra si disse, molte dimostrazioni degne di esser lette; ma in oltre nè anche vi debbono esser compresi, per le ragioni poc' anzi dette.

Adunque l' XI°, XII°, e XIII° libro non sono a rigore, che il VII°, VIII°, e IX° degli Elementi di Euclide, che forse da Teone Alessandrino, o pur da altro antico espositore furono trasportati nel luogo dove si trovano, ed interrotti da libri di diverse trattazioni. Noi intanto continueremo a nominarli XI°, XII° e XIII°, essendosi quest' uso inveterato; e trovandosi essi così citati da tutti.

DELLE PRINCIPALI VERSIONI E COMENTI SOPRA GLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

Non è forza di un solo il minutamente trattare delle diverse traduzioni, e de' tanti comenti, che si sono fatti degli Elementi di Euclide; e poi un tal lavoro sarebbe inutile per la gioventù, e lontano dal nostro scopo. Basta dir solamente, che quest' opera è stata tradotta, e comentata in tutte le lingue (20). Vi bisognerebbe dunque non meno, che una competente cognizione di moltissime lingue, ed una lettura interminabile, per giugnere a questo scopo. Mi limiterò quindi a dar solamente un saggio delle versioni le più conosciute, e de' principali comenti, la qual cosa, oltre alle utili cognizioni, che farà acquistare a' giovani, servirà anche a liberarmi dalla taccia di quelli, che non sapendo da se stessi discernere qual possa essere il merito di novità di un lavoro scientifico già tante volte ripetuto, e da sommi uomini, grideranno contro colui, che lo ha prodotto. Chi poi vorrà delle notizie bibliografiche sul proposto oggetto, ne troverà abbondevolmente raccolte

(20) Vi sono di Euclide moltissime versioni in Latino, Italiano, Francese, Spagnuolo, Inglese, e ve ne sono anche in Tedesco, Svedese, Olandese, Danesè, Russo. E per riguardo alle lingue Orintali un tal libro è stato più volte tradotto, e comentato in Arabo, e ne sono state anche fatte delle traduzioni in Persiano, in Turco, ed in Ebreo.

in tutte le Biblioteche dotte; e potrà principalmente consultare un' operetta del Signor Bose di Wittembergh intitolata: *Schediasma litterarium etc. de variis Euclidis editionibus* , *Lipsiae* 1754. , e l' eruditissima Storia delle Matematiche dell' Heilbronner all' articolo *Euclides*.

Comentatori Greci.

Teone, Proclo.

Il primo comentatore di Euclide fu Teone, uno degli ultimi geometri della Scuola di Alessandria, che visse nel quarto secolo; ed i suoi comenti o Scolj trovansi anche nell' Euclide del Commandini, del quale appresso parleremo.

Non essendo fino a noi pervenuto altro codice greco degli Elementi, oltre quello co' comenti di Teone, nel quale sommi Geometri moderni hanno trovati non pochi difetti, che chiaramente apparisce non potersi ad Euclide attribuire, si sono perciò indotti a credere, che sieno questi derivati dalle mutazioni, che Teone medesimo si avvisò di fare sul Testo. Ma sia così, o sia che alcuni di que' difetti appartengano alla negligenza, o all' ignoranza degli antichi amanuensi, certo è che Teone avrà sempre il torto d' averci trasmesso un testo degli Elementi pieno di molte scorrezioni degne di essere avvertite.

Un secolo dopo di questo Geometra, gli Elementi di Euclide, al meno il primo libro di questi, ebbero

un altro annotatore nella persona di Proclo Geometra del V° secolo (21), di cui scrisse la vita il Geometro Marino di Napoli suo discepolo, e successore nella Scuola, e del quale altro lavoro matematico non è a noi pervenuto, che una prefazione a' *Dati* di Euclide, che trovasi ordinariamente impressa nel principio di questo Trattato.

Quest' opera di Proclo, sebbene sia piena di moltissime distinzioni scolastiche proprie di que' tempi, è pure commendabilissima per le molte notizie di storia geometrica, che vi si contengono, e che altrimenti non ci sarebbero pervenute, e pe'diversi tratti di cui è sparsa riguardanti la metafisica della Geometria. L' Euclide Greco con la versione latina in fine, stampato per la prima volta nel 1565 in Basilea, presso il celebre, e dotto stampatore Ervagio, per cura di Simone Grineo, contiene oltre agli Scolj di Teone, anche il testo greco de' comentarj di Proclo. E la versione latina di questi ultimi fu fatta da Francesco Barocci Patrizio Veneto, ed impressa in Padova nel 1659 in fol. col titolo: *Procli Diadochi* ec. *Commentarium ad universam Mathematicam disciplinam* ec. *Lib. IV*.

---

(21) Pietro Ramo nelle sue *Scholae Mathematicae* alla pag. 37 è caduto in un equivoco notabile nel creder Proclo vivente nel primo secolo dopo Cristo, e quindi anteriore a Teone. Egli s'esprime in fatti così: *Proclus aetate major Theonem minorem, neque videre, neque nosse potuit. Proclus floruit proximo post Christum saeculo; Theon fere quarto.* Dal che risulta esser falso l'argomento, ch'egli fonda sopra di ciò. (*Veg. il luogo cit.*)

Versioni e Comenti di Euclide in Arabo.

Moltissime versioni in Arabo furon fatte di Euclide con comenti (22); ma la più celebre di tutte, e della quale convien perciò, che quì si faccia menzione, si fu quella del Geometra ed Astronomo Persiano Chogiah Nassireddin al-Thussi morto nell' anno dell' Egira 675, dell' era nostra 1276 (23). Una tal' opera, che contiene, per opinione di tutti coloro, che alla conoscenza della lingua in cui è scritta accoppiano quella delle Matematiche, un' esatta esposizione del testo di Euclide, e de' dotti comenti, fu stampata per la prima volta in Arabo in Constantinopoli nell' anno 996 dell'Egira, cioè 1587 dell' era nostra: e resterà sempre come un alto monumento della protezione, che contro al creder comune il governo Ottomano accorda alle scienze Matematiche, il trovare in questa stampa un privi-

(22) L'Herbelot nella sua Biblioteca, all' articolo *Aklides*, ne annoverà dieci delle più eccellenti. E può anche vedersi a questo proposito il Montucla nel *n.* XVII. *del Lib. I. Part. II.* della sua Storia delle Matematiche.

(23) Un luogo del *Ban Hebraeus Cron. Arab. Part. X.* riportato dall' Assemanno nel Catalogo de' Manoscritti della Biblioteca Medicea dice: *Hoc etiam tempore (nimirum anno Hegirae* 675, *Christi* 1276) *diem obiit, annos septuaginta octo natus, Chogiah Nassireddinus Tusensis.*

legio turchesco del Sultano Amurat, col quale si permette la vendita di questo libro in tutto l'impero Ottomano, *senza un danajo di dazio, o di gabella.* Un tal libro fu di nuovo stampato nella lingua stessa nel 1594 nella superba tipografia Medicea in Roma, per mezzo di un codice della Biblioteca Medicea riportato dall'Assemanno nel Catalogo di questa al numero 272.

Tra le cose contenute in questo libro, che sono degne di una particolare attenzione, merita di essere distinta una rigorosa dimostrazione del postulato V. di Euclide, nella quale il Geometra persiano maestrevolmente invertendo l'ordine di alcune proposizioni del I° libro degli Elementi, fa precedere la proposizione 32 di tal libro alla teorica delle parallele, dimostrando quella ingegnosamente, senza servirsi di questa, come ha fatto Euclide. Una tal' ingegnosa dimostrazione è anche riportata dal Castiglioni padre nella prima Memoria sul postulato V° di Euclide da lui inserita nel volume dell' Accademia di Berlino, per l'anno 1787, ed è stata recata da noi in fine del nostro Euclide in 4°, e del volume I delle edizioni VI e VII di questo Corso, insieme ad altre ricerche sullo stesso assunto.

Oltre all' opera di cui parliamo, deesi alle cure di quest' abilissimo Geometra una raccolta delle versioni in Arabo di moltissime opere geometriche della Scuola Greca fatte da diversi autori. Una tal raccolta intitolata *Tahrir Hendassiat* (*Accurata collectio geometrica*) (24) contiene: 1° *Una spiegazione degli Elementi*

---

(24) Si riscontri la Biblioteca dell' Herbelot all'art. *Thahir.*

di *Euclide*; 2° *L'Almagesto di Tolomeo*; 3° *I dati di Euclide*; 4° *La Sferica di Teodosio*; 5° *La Sferica di Menelao*; 6° *La Sfera mobile di Autolico*; 7° *L' Ottica di Euclide*; 8° *Il libro della notte e del giorno di Teodosio*; 9° *Le ascensioni e discensioni*, cioè *del levare*, *e del tramontare degli astri*, opera anonima (25); 10° *Gli Oroscopi di Asclepio*, o *Esculapio*; 11° *Il trattato de' dischi solare e lunare di Aristarco*; 12° *della conoscenza ed estensione delle figure*, opera anonima; 13° *I lemmi* attribuiti ad Archimede; 14° Ed i suoi *due libri sulla Sfera e sul Cilindro*; 15° Il Trattato di Teodosio *della posizione e della quiete de' corpi*; 16°; *I Conici di Apollonio*. A questa stupenda collezione di opere de' Greci maestri v' è aggiunto un *Trattato delle Sezioni Coniche* di Thebit Ben Corrah, e sei libri di Note del Nassireddin. Si riscontrino per le cose già dette l' opera citata dell' Herbelot, ed il Catalogo poc' anzi detto dell' Assemanno.

Sarebbe anche desiderabile, che si ponesse a conoscenza del pubblico un codice Arabo di un certo *Abu-Giudi*, che ha per titolo: *Explicatio eorum, quae in*

(25) In due codici Arabi della Biblioteca Medicea, riportati dall' Assemanno al num. 271, e 286 del Catalogo di questa vi si rapportano i nomi di quei dotti Arabi che tradussero le opere de' Greci, che poi riunite dal Nassireddin hanno formata la collezione di cui si parla; ed in ciascun di essi si attribuisce il libro *Delle ascensioni e discensioni* ad *Autolico*; perciò non sapremmo dire per qual ragione il Toderini, dopo di aver detto essere anonima una tale opera, soggiunga: *non evvi nome*, *e pure di Teodosio*.

principiis Geometriae Euclideis non videntur satis esse evidentia. Un tal codice, di cui parla Ottingero nella sua Biblioteca Orientale, esisteva a' tempi suoi nella Biblioteca di Leida.

Versioni e Comenti de' moderni dal XII° al XVI° secolo.

CAMPANO, ZAMBERTI, PACCIOLI, FABER, TARTAGLIA.

Gli Elementi di Euclide si videro la prima volta in Italia nel secolo XIII° tradotti dall' Arabo con non dispregevoli comenti di Campano di Novara. Questa versione stampata la prima volta in folio presso Erhard Radtolt, uno de' primi stampatori di quel tempo, col titolo di *Praeclarissimus liber Elementorum Euclidis perspicacissimi in artem geometricam incipit quam felicissime*, e con in fine la leggenda: *Opus Elementorum Euclidis Megarensis in geometricam artem, in id quoque Campani perspicacissimi commentationes Erhardus Radtolt Augustensis, impressor solertissimus, Venetiis impressit, anno salutis* MCCCLXXXII. *octavo Kal. Junii. Lector vale.* In essa si veggono per cura di quell'abile stampatore impresse le figure al margine del libro, maniera prima di lui non conosciuta. Un tal libro fu in seguito ristampato in Ulm nel 1486, e poi nel 1489 o 1491 in Vicenza, presso i socj stampatori Lionardo di Basilea, e Guglielmo di Pavia. Dopo questa versione ed esposizione del Campano, gli Elementi di Euclide ritrovarono varj altri espositori,

ma nessuno ne intraprese una nuova versione, e ciò fino al XVI° secolo, come avremo occasione di far qui appresso osservare.

L' epoca in cui visse Campano, importante a sapersi, poichè dee aversi come l' epoca in cui la Geometria cominciò ad esser comunemente conosciuta in Italia, e poi Oltremonti, è diventata un affare di opinione tra i dotti. Il Tritemio seguito da molti altri, nel numero de' quali vi è l' insigne Viviani (*Praef. in Aristaeum*), lo ha fatto vivere nel 1030; il che se fosse vero, l'epoca della conoscenza della Geometria in Italia rimonterebbe all' XI° secolo, e Campano sarebbe stato assolutamente il primo traduttore degli Elementi di Euclide dall' Arabo. Molti altri, tra quali il Vossio, ed il Fabricio, lo vogliono già esistente nel 1200, e ciò potrà forse esser vero, atteso quello che tra poco diremo. Il sicuro si è, che tra le opere di Campano ve n' è una intitolata *de Sphoera*, dedicata ad Urbano IV° protettor delle scienze a' suoi tempi; il che mostra che Campano non potè scriver quest' opera, che tra il 1261, nel qual anno fu Urbano IV° assunto al Ponteficato, e'l 1264 nel quale morì; donde si rileva, ch' egli era Filosofo e Matematico rinomato nella metà del XIII° secolo; e che perciò era stato preceduto per un secolo nella versione di Euclide dall' Arabo da Adelardo Goto Monaco del Monistero Batoniese in Inghilterra nel secolo XII°. Ma chi asserirà mai che la versione di quest'Inglese fosse nota nel continente, ed a Campano, quando egli produsse la sua? Certamente nessuno. Potrà dunque restare a Campano il merito di essere stato il primo ad intraprendere nel continente quest' impegno. Il Tiraboschi, avendo fatti tutti gli sforzi per provare, che Cam-

pano viveva nel secolo di Urbano IV°. ne deduce per conseguenza, ch'egli si servì della versione di Adelardo, chè solamente comentò; e vorrebbe che così fosse, lusingandosi di liberarlo dalla taccia, che giustamente gli si fa da' dotti Matematici, di aver data *sopra di una cattiva versione arabica una peggior versione latina di Euclide*: ma chi non vede, che se Campano non avvertì i difetti della versione di Adelardo, nell' ipotesi del Tiraboschi; nè tampoco gli avrebbe riconosciuti nella versione arabica sulla quale lavorò quell' Inglese? Adunque per questa parte non può scusarsi il Campano. Il Tiraboschi reca due codici, in appoggio della sua opinione, cioè il 7213 della Biblioteca Regia Francese, che ha per epigrafe: *Euclidis Elementorum lib. XV, ex Arabico in Latinum ab Adhelardo Gotho Bathoniensi conversi, cum comentario Campani Novariensis*: ed il 3359 de'Manoscritti dell' Inghilterra, e dell' Irlanda, il cui titolo è: *Euclidis Elementorum lib. XV, ex versione Adhelardi de Arabico, cum comentario Magistri Campani Novariensis.* Ma l' autorità di questi codici, da' quali il Campano apparisce solamente comentatore di Euclide, vien fortemente contrastata dal sapersi in quanti modi gli amanuensi abbiano guastati, e corrotti i frontespizj de' libri da loro trascritti; dal trovarsi degli altri codici ove Campano non solamente vien nominato come comentatore di Euclide, ma anche come traduttore de'suoi Elementi dall' Arabo; e dal non trovarsi mai fatta menzione da Campano di essersi servito della versione di Adelardo, che forse neppur conobbe, nè tampoco l'essere stato ciò detto dagli altri espositori di Euclide, che lo seguirono a poca distanza di tempo, i quali al con-

trario ebbero sempre il Campano come autore di una tal traduzione. E non sarebbe stato fuor di proposito, che taluno avesse posta al confronto la versione degli Elementi che si attribuisce al Campano con qualche genuino codice della versione di Adelardo, a fine di assicurarsi in tal modo, se esse sieno identiche, o pur due diverse. Che che ne sia di ciò, avrà sempre il Novarese Campano il vanto di aver fatti conoscere il primo nel continente gli Elementi di Euclide, e di averli corredati di dotti comentarj, che ancora si leggono, e si studiano dagli amatori della buona Geometria: che sono stati in gran parte abbracciati dal Clavio, e con grandissima stima citati anche dopo dal celebre Geometra Viviani.

Il Campano aggiunse alla fine del V° Libro di Euclide la teorica delle ragioni disuguali, ricavandola in gran parte dal VII° libro delle Collezioni Matematiche di Pappo; e quest'esempio è stato seguito posteriormente da altri espositori di Euclide, come sono il Clavio, il Commandini, il Barrow, *ec.* Siccome però una tal teorica non occorre negli Elementi, e ch' è agevole il supplirla, ogni qual volta bisogni, nel resto dello studio delle Scienze matematiche; perciò si suole ordinariamente tralasciare, e così trovasi praticato in questi Elementi.

Nel principio del XVI° secolo molte versioni furono fatte degli Elementi, tra le quali le più rimarchevoli sono quella di Luca Paccioli stampata nel 1509, calcata sulla versione di Campano; l'altra di Bartolomeo Zamberto Veneziano eseguita sul testo greco, e stampata la prima volta in Venezia nel 1505, e posteriormente in Basilea tre volte, per cura dello Stampatore

Ervagio, cioè nel 1637, 1546 e 1565. Una tal versione però non è molto stimata, perchè inesatta, a cagione che il traduttore conosceva bene il greco, ma non ugualmente bene la Geometria: ciò non ostante da essa ne fu rilevata un'edizione di Euclide fatta eseguire, pe' suoi tipi di Parigi, dal celebre Errico Stefano; ed i Signori Giacomo Faber ed Isacco Pontano, nelle edizioni che diedero degli Elementi di Euclide, aggiunsero al Comentario di Teone, ed alle note di Campano, anche quelle di Zamberto. Il Tartaglia in oltre produsse per la prima volta la sua versione italiana degli Elementi in Venezia nel 1543, ristampata poi due altre volte nel luogo stesso, cioè nel 1557, e 1585: e questo libro, ch'è la prima versione di una tal' opera in questa lingua, non sarebbe certamente dispregevole, se andasse esente da quella durezza, ch' era propria della lingua volgare di que' tempi, molto più perchè Tartaglia volle scrivere in quella, forse più scorretta, del suo paese; e dopo di lui il Foix Candalla pubblicò nel 1556 il suo Euclide accresciuto di un decimosesto libro. Ma io non m' intrattengo a parlar di queste versioni poco interessanti per noi, per poter passar sollecitamente ad esporre quelle, che dopo la metà di tal secolo faustissimo per la Geometria diedero con molto successo due abilissimi Geometri, il Commandini ed il Clavio.

Principali versioni ed esposizioni degli Elementi di Euclide, eseguite da' Geometri del continente dopo la metà del XVI° *Secolo, e nel* XVII°.

COMMANDINI, CLAVIO, BORELLI, VIVIANI, GRANDI.

Non v'ha lode che basti a compensare i grandi servigi resi alle Matematiche da Federico Commandini da Urbino, Geometra del XVI° secolo, che ad una profonda cognizione di esse accoppiava una perfetta intelligenza del greco, ed una istancabilità nel travaglio. Dobbiamo alle sue dotte fatiche non solamente la migliore e più esatta versione dal greco in latino degli *Elementi di Euclide*, e de'due libri d'Ipsicle Alessandrino aggiunti ad essi, con comenti brevi e pieni di soda dottrina, stampata in Pesaro nel 1575, ed in seguito varie altre volte ristampata; ma anche le versioni, e rischiaramenti delle *Collezioni Matematiche* di Pappo; de' *primi quattro libri de' Conici* di Apollonio Pergeo; e delle *opere* di Archimede. In oltre egli tradusse anche le *rimanenti opere* di Euclide, il libro di Erone, che ha per titolo *Spiritalium*, quello di Teodosio *De habitationibus*, e gli altri due *de' giorni e delle notti* dello stesso autore; i due libri di Autolico *sullo spuntare, e tramontar del sole*, e l'altro *della sfera che si muove*: finalmente il libro di Aristarco intitolato *delle grandezze, e distanze del sole, e della luna*.

Commandini stesso diede dell'Euclide da lui tra-

dotto in latino una versione in italiano, che fu stampata in Urbino sua patria nel 1575, e poi ristampata in Pesaro nel 1719 con aggiunte e correzioni, ma tal versione non ha il merito dell' altra latina, che ne aveva già data.

Poco dopo del Commandini, cioè nel 1574, Cristoforo Clavio gesuita versatissimo nelle Matematiche pubblicò, per la prima volta, in Roma i tredici libri di Euclide insieme a' due altri d' Ipsicle, e ad un XVI° libro, ove parla del rapporto delle figure regolari inscritte l' una nell' altra, la qual cosa aveva prima di lui fatta il Candalla. Egli vi aggiunse de' comentarj scritti con molto metodo, e pieni di utilissime cognizioni, le quali cose hanno reso un tal libro pregevolissimo, e lo hanno fatto più volte ristampare. Il Clavio si avvisò anche di fare alcune mutazioni a proposito sul testo di Euclide, correggendo accortamente molte cose in cui gli parve viziato, come si potrà rilevare dalle nostre Note.

Fra le molte esposizioni di Euclide comparse in Italia ad uso delle Scuole, basterà che si faccia parola di quelle de' tre sommi Geometri Borelli, Viviani, e Grandi.

Il primo di questi, essendo passato dall' Università di Messina, ad insegnar Matematiche in quella di Pisa, e trattandosi a quel tempo tra molti dotti Geometri de' quali abbondava l' Italia, usciti dalla Scuola del Galilei, della ristaurazione del V° lib. di Euclide, al che aveva data occasione una scrittura intitolata *Principio della quinta giornata del Galileo*, da questo dettata negli ultimi giorni di sua vita al suo discepolo Torricelli, che l' aveva presentata al Serenissimo Principe Car-

dinal Leopoldo de' Medici, da cui era stata donata a Viviani altro discepolo del Galilei stesso, in dove contenevansi dimostrazioni delle definizioni quinta, e settima del quinto libro di Euclide, siccome delle converse loro; il Borelli volle anch' esso entrare a parte di una tal restituzione del V° libro. Egli dunque trovando poco concludente tutto quello, che fin allora gli altri Geometri avevan fatto a questo proposito, immaginò una nuova maniera da trattare delle proporzioni, e delle quantità proporzionali; e siccome chi ha già dato il passo d'innovare una cosa negli Elementi, difficilmente sa arrestarsi a quella sola, senza proceder oltre ad innovar tutto il rimanente; perciò il Borelli impastò da capo gli Elementi di Euclide, distribuendoli in nove libri. Tutti gli sforzi del Borelli non fecero però migliorare affatto gli Elementi nè nel rigore, nè nell' ordine; e la sua ristaurazione del V°. libro, lungi dal produrre l'effetto per cui l'aveva intrapresa, cioè di rendere le teoriche di questo libro più facili, le ha al contrario sovvertite, e confuse: ed egli si ha meritati perciò i rimproveri del Barrow, e di Roberto Simson. (*Vegg. le not. cit.*)

La scrittura del Galilei, della quale poco fa abbiamo parlato, diede occasione al suo discepolo Viviani, uno de' più gran Geometri Italiani del XVII° secolo, di fare un nuovo disteso del V° libro di Euclide, come lo dice egli stesso nell' indirizzo, che fa al summentovato Cardinale Arciduca di una tal sua opera stampata in Firenze nel 1574. E da ciò forse s'indusse poi a pubblicare un' esposizione degli Elementi geometrici di Euclide ad uso delle Scuole, cioè de' primi sei libri e dell' XI°, e XII°, ove oltre al V° libro del Geometra

Greco, si trova anche la poc'anzi detta sua scienza universale delle proporzioni, ed il principio della quinta giornata del Galilei. Eccetto però queste due ultime cose, che debbono interessare la curiosità de' Geometri, gli Elementi geometrici del Viviani, commendabilissimi per la precisione, e per la purità di linguaggio con cui sono scritti, non contengono alcuna utile, e nuova rettificazione importante del testo di Euclide.

Ad una semplice esposizione del testo de' sei primi libri, e de' tre ultimi degli Elementi di Euclide si limitò pure l' Ab. Camaldolese Guido Grandi, celebre Matematico, ed autore di moltissime opere piene di profonda dottrina, che gli meritarono anche a' suoi tempi la stima de' principali Matematici d'Europa. Una tal' opera è stata in seguito più volte ristampata, ed anche al presente è il libro d' istituzione geometrica nelle migliori Scuole d' Italia.

Principali edizioni di Euclide fatte in Inghilterra.

La prima edizione di Euclide, che, per quanto io sappia, sia comparsa in Inghilterra, è quella in inglese di Billingsley colla prefazione di Giovanni Dee stampatore in Londra nel 1579. Ma nel 1620 il Brigg ne intraprese un'edizione Greco-Latina col titolo di Ευκλειδου στοιχειων Βιβλια ιγ, cioè *Elementorum Euclidis libri tredecim*. Una tal versione doveva esser calcata su quella del Commandini, corretta in alcuni luoghi col contesto di altri esemplari greci, come sta detto nell'

epigrafe del libro. Ma non so per qual cagione di quei tredici libri non furono stampati, che solamente i primi sei in Londra dallo Stampatore Guglielmo Jones. Debbo però avvertire, che non pare che il Brigg abbia col suo confronto fatta migliorare la versione dell' eruditissimo geometra Italiano, che anzi questa si trova in qualche luogo deteriorata. Un esempio di ciò lo dà la definizione VII del libro primo, cioè quella della superficie piana, nella quale vi si trova intrusa la voce *rectas*, che rende fallace una tal definizione: e questo stesso equivoco s' incontra anche in alcune altre versioni di Euclide ultimamente pubblicate da traduttori poco accorti.

Nel 1659 l' insigne Matematico Isacco Barrow Professore Lucasiano pubblicò con una brevità ammirabile in un piccol volume in 12. i tredici libri di Euclide, ed i due d' Ipsicle, e questa sua opera, molto commendabile per l' esattezza dell' esposizione, fu varie volte ristampata con correzioni dell' autore; e nelle edizioni posteriori vi si trova aggiunto in fine il libro de'Dati. Dispiace solamente un poco in quest' opera del Barrow quel sistema, che l' autore ha anche tenuto nel suo Archimede, Apollonio, e Teodosio, di servirsi, di molte simboliche indicazioni, a fin di esprimersi con una brevità che non ha pari, e che spesso degenera in oscurità. Il Barrow ha in oltre, per la stessa ragione, soppresso nel suo Euclide quelle parti di ogni Proposizione, così dette *esposizione e determinazione*, le quali sono, per la maggior parte de'giovani principianti, una spiega dell' enunciazione astratta; ed in fine egli anche aggiunse al suo V° libro le proposizioni sulle ragioni disuguali, delle quali sopra si è parlato.

Le lezioni geometriche da questo geometra date nell' Università di Cambrigia, per gli anni 1664, 1665, 1666, che furono pubblicate in Londra nel 1683 e 1685 in 2 vol. in 12, sono piene di una profonda dottrina, e meritano di esser lette con attenzione da coloro, che coltivano queste scienze.

Dopo l' Euclide del Barrow, comparve nel 1701 in Oxford l' Euclide latino del Keill, ad uso delle Scuole d' Inghilterra. Esso non contiene perciò, che i primi sei. libri, e l' XI° e XII° secondo la versione del Commandini modificata in qualche piccola parte; ed in fine vi furono aggiunti dall' espositore Inglese, ch' era un dotto discepolo del Newton, tre brevi ed eleganti trattati, il primo di *Trigonometria Rettilinea*, l' altro di *Trigonometria Sferica*, e 'l terzo *de' Logaritmi*. Questo libro stimabilissimo è stato più volte di seguito ristampato nel luogo stesso, e con moltissima accuratezza, la qual condizione dee non poco valutarsi ne' libri elementari, principalmente di Matematica. Merita pure di esser letta la bella Prefazione di questo Geometra ad un tal suo libro.

Due anni dopo la pubblicazione della prima edizione dell' Euclide del Keill, cioè nel 1703, comparve in Oxford la superba edizione greco-latina degli Elementi di Euclide eseguita dal celebre Astronomo Inglese David Gregory Professore Saviliano. Una tal edizione è uno de' tre gran monumenti dalla nazione inglese innalzati alle scienze Matematiche, e che mostrano il giusto, e ben meritato rispetto, ch' essa ha sempre avuto per le opere degli antichi Geometri: gli altri due di tali monumenti sono il superbo Apollonio di Halley, e l' elegantissimo, e dotto Archimede del Veronese Torelli,

stampati entrambi nel luogo stesso ; il primo nel 1710, e l' altro nel 1792. La versione del Gregory è anche calcata su quella di Commandini, confrontata però con altri esemplari greci, ed a piè di pagina vi sono notate alcune brevi riflessioni dell' espositore inglese. Una tal' opera è preceduta da una bella e dotta Prefazione, e vi si trovano in fine aggiunti il libro de' dati colla Prefazione del Geometra Marino Napolitano, di cui abbiamo altra volta fatta menzione, e quegli altri trattati scientifici, che si attribuiscono ad Euclide, e che sono a noi pervenuti, cioè, *Introductio Harmonica*: *Sectio Canonis*: *Phoenomena*: *Optica*: *Catoptrica*: *De divisionibus*; ed un frammento *de levi et ponderoso.*

A queste dotte ed utili fatiche de' suoi compatriotti volle all' epoca stessa aggiugnere anche le sue l' egregio Matematico Inglese Edmund Scarbugh, il quale pubblicò in Oxford nel 1705 in inglese i sei primi libri degli Elementi di Euclide, con sue annotazioni e supplementi.

Erano già scorsi sei secoli, da che gli Elementi di Euclide si erano incominciati a tradurre in varie lingue; moltissime versioni, molte esposizioni, e moltissimi comenti si erano fatti sopra di essi da dotti geometri, e chi in un luogo, chi in un altro aveva avvertita, e corretta qualche incongruenza nel testo Greco di Teone. L' Euclide del Nassiredin, e la versione di Campano fatta dall' Arabo, in alcuni luoghi differivano dall' Euclide di Teone, e quindi da molte versioni fatte su questo, e la ragione stava pe' primi. Già il Clavio aveva in molte parti cambiato il testo di Euclide, e principalmente nel libro V°, come si vedrà nelle note in fine

di questa nostra esposizione degli Elementi; ed aveva inoltre sparso de' dubbj sulla definizione della ragion composta. Il Galilei convalidando questi dubbj aveva proposta la vera definizione di tal ragione, nel principio della sua *Quinta giornata*, della quale si è parlato di sopra; ed altri Geometri lo avevano seguito, tra i quali il poc'anzi detto Inglese Edmund Scarburgh, che dichiarò apertamente, che una tal definizione, come ritrovasi nel testo greco, non poteva esser la vera di Euclide; e che questa doveva essere espressa in una maniera analoga alla definizione 10. del lib. V°. Ciò non ostante egli, in vece di correggerla l'aveva al contrario ritenuta. Il Keill pure, sebbene avesse seguita la versione del Commandini, se n'era però in qualche luogo allontanato, e non fuor di proposito. Nessuno intanto aveva fino al 1756 apertamente pronunziato, che il Testo di Euclide era stato assolutamente guastato in molti luoghi, e che bisognava tentare di ridurlo alla sua vera lezione, rilevandovi questi difetti, e cercando di correggerli secondo la mente dell'antico geometra greco, il che poteva solamente ottenersi seguendo con infinita delicatezza le tracce che vi restavano nella sua opera.

Questa felice idea venne la prima volta in mente a Roberto Simson uno de' sommi Geometri Inglesi, gran coltivatore, e promotore della Geometria degli antichi, dovendosi a lui non meno, che una giudiziosissima restituzione de' due libri di Apollonio Pergeo *de Determinata Sectione*, e de' tre libri della difficilissima opera de' *Porismi* composta da Euclide, e dall'ingiuria de' tempi a noi tolta. Egli dunque pubblicò nel 1756, per le stampe di Glascovia in un volume in 4°.

i primi sei libri, e l' XI° e XII° degli Elementi, col titolo *Euclidis Elementorum Libri priores sex, item undecimus et duodecimus, ex versione Federici Commandini, sublatis iis quibus olim libri hi a Theone, aliisve vitiati sunt*, ed in fine vi aggiunse alcune *Note critiche, e geometriche*, ove rende ragione di tutte quelle mutazioni, ch' egli aveva credute necessarie a doversi fare sul Testo dell' Euclide di Teone. Una tal' opera, in seguito tradotta da lui stesso in idioma inglese, e ristampata in Edimburgo nel 1775, insieme con un Trattato di Trigonometria Piana e Sferica, e con una esposizione del libro de' Dati di Euclide, è divenuta il libro classico di Geometria nelle Università d' Inghilterra, prendendo quel posto nell' istruzione geometrica, che prima era stato occupato dall' Euclide del Keill; ed è stata perciò frequentemente ristampata, esistendovene non meno di 16 edizioni fatte sino al 1814.

Dall' esposizione fatta in quest' ultimo articolo si rileva, che in Inghilterra siansi sempre tenuti in altissimo conto gli Elementi di Euclide, e che nelle Scuole Inglesi non siasi conosciuto, nè forse si conosca ancora altro libro Elementare di Geometria: e dice bene il signor Montucla, che a questa rigorosa maniera d' istituir la gioventù si dee attribuire, che l' Inghilterra vede schiuder meno di quelle opere, che facilitano la scienza snervandola, e che una tal nazione non ha mai mancato di ottimi Geometri, le opere de' quali sono sempre scritte colla massima precisione, e con rigore.

Della mia esposizione degli Elementi Geometrici di Euclide.

Giunto al segno di dover dire qualche cosa della mia esposizione degli Elementi geometrici di Euclide, farò primieramente osservare, come non da propria volontà, ma da necessità forzato, mi vidi nell' obbligo di por mano ad una nuova esposizione di una tal' opera. Avendo sostenuta dal 1803 fino al 1806 nell' Università degli studj la Cattedra di *Sintesi*, della quale fermava parte, com' è di ragione, la Geometria di Euclide, mi aveva presa la cura di riscontrare moltissime versioni di questa, e di leggere molti comenti fatti sopra di essa da dottissimi Geometri; ma nel 1806, essendo passato da questa Cattedra all' altra di Analisi moderna, pèr la riforma allora avvenuta in tale Università, abbandonai interamente il pensiero di queste occupazioni, nè forse sarei mai più rivenuto sopra di ciò, se dopo un rapporto di una Commissione nominata dal Governo per fissare i libri necessarj all' istruzione della gioventù ne'Collegj, e composta di rispettabili e degni soggetti, tra quali l' insigne nostro Matematico il signor Fergola, non fossi stato incaricato di compiere un Corso ad uso di questi stabilimenti. Accettato un tal incarico, pensai subito, ch' era necessario di camminare sulle tracce del Simson per la Geometria Elementare, ed avrei a dirittura tradotto in Italiano l' Euclide di questo Geometra, se non mi fossi accorto, che oltre le sue correzioni, restava anco-

ra altro da fare sul Testo di Euclide da lui dato; e che bisognava sbandire, come soverchiamente sofistica, qualche una di esse: e, per dirlo in breve, se non fossi stato indotto a far diversamente da tutte quelle ragioni, che osserverà chiunque senza prevenzione si porrà a fare il confronto di questo mio Euclide con quello del Geometra Inglese.

Or dopo tutto quello, che si è finora detto nel presente discorso, dalla pag. XXXIX in poi, ciascuno avrà dovuto rilevare, che due soli si possano a rigore chiamare i traduttori di Euclide, cioè il Campano ed il Commandini; giacchè la versione del primo servì di base a quanti altri vollero dopo lui intraprendere l' assunto stesso, sino al Commandini, che niente incaricandosi della versione del Campano, eseguì la sua sul testo di Teone; e questa poi fu adottata da tutti gli altri traduttori degli Elementi, che si erano solamente limitati ad un confronto con alcuni esemplari greci. Qual ragione vi era dunque, perchè io dovessi usare la faticosa, ed inutile singolarità di far diversamente, e di consumare il poco tempo che mi rimane dalle mie occupazioni in tradurre nuovamente da capo un libro tante volte tradotto? Io dunque feci come gli altri, e mi servii della versione del Commandini, che confrontai solamente ne' luoghi più importanti, e ne' luoghi dubbj col testo Greco di Ervagio, del Gregory, e del Brigg.

Con questi mezzi io produssi in pubblico nel 1810, la prima volta, la mia esposizione degli Elementi di Euclide, che poi stampai la seconda volta in forma più elegante nel 1811, con alcune piccole modificazioni, e vi aggiunsi in fine quelle *Note critiche*, *e geometriche*, che aveva promesse fin dalla prima edizione, ma

che poi non ebbi tempo di aggiungerle in fine di questa; poichè al terminare la stampa del secondo volume di essa, già eran mancate le copie del primo, ond' è che mi vidi nell' obbligo di attendere ad una nuova edizione, piuttosto che completare la prima.

Successivamente ne diedi tre altre edizioni nel 1812, 1814 e 1816; ed in esse ebbi sempre occasione di far qualche nuovo cambiamento o correzione essenziale sul Testo Greco. Finalmente nel pubblicar per la sesta volta gli Elementi suddetti, nel 1818, mi diedi a riveder da capo, e minutamente la mia versione, per metterla il più che fosse possibile in esatta corrispondenza coll' originale di Euclide, ed aggiunsi alcune Note ove credei che ve ne fosse ancora bisogno. In seguito ne diedi nel 1819 una ristampa simile alla precedente; ed ora essendosi anche questa terminata, ora che ho dovuto riprodurli non ho tralasciato di riveder nuovamente il mio lavoro, e di corredarlo di qualche nuova noterella.

Della versione degli Elementi di Euclide fatta dal Peyrard in latino ed in francese.

I tempi in cui viviamo, e l' autorità di una delle principali Accademie di Europa, mi obbligano a far quì menzione della più recente versione degli Elementi di Euclide fatta in Francia dal Sig. Peyrard sopra un nuovo codice; del che eccone brevemente la storia.

Il Signor Monge, uno de' più distinti Matematici Francesi de' tempi nostri, allorchè da questi fu per la

prima volta occupata Roma, nel fare lo spoglio de'libri più rari della Biblioteca Vaticana, per inviarli a Parigi, raccolse tra le altre cose un codice de'15 libri degli Elementi di Euclide, una col libro de' Dati, e co' due libri di Ipsicle Alessandrino, segnato col n°. 190; ed altri codici degli Elementi stessi furono presi in altre distinte Biblioteche di Europa; sicchè nella Biblioteca imperiale di Parigi se ne raccolsero fino al numero di 23.

Con tanta ricchezza di codici Euclidei, il Signor Peyrard intraprese una versione nuova del Testo di Euclide da capo a fondo, come se altra non ne fosse mai stata fatta; e prescelse per codice più purgato quello di sopra specificato, che reputò anche essere il più antico, stimandolo del nono secolo.

I Giornali avevano più volte fatta menzione di tal versione, senza che essa fosse ancora comparsa in luce; e le Classi di Letteratura, e di Matematiche dell'Istituto di Francia erano state più volte richieste dal Governo del loro parere sul merito di questa nuova versione, che con grandissimo lusso e spesa stavasi eseguendo. Finalmente una tal opera uscì fuori al pubblico nel 1814.

Si potrà rilevare dalla Prefazione che sta innanzi al primo volume di tal edizione quanto abbia cercato di fare il traduttore Francese; noi quì intanto ci limiteremo a poche cose che ne indicano i difetti, e ci permetteremo anche qualche piccola riflessione su que'rapporti dell' Accademia, de' quali sopra sta detto.

Il traduttore Peyrard giudica il suo codice n°. 190 del nono secolo, e perciò anteriore a tutti gli altri; ma su qual fondamento egli così giudica, è ciò che non dice. In seguito di tal giudizio egli reputa di Euclide tutto ciò che in tal codice trova contrario agli

altri, e quindi erronei que' luoghi di questi, che con quello non combinano. Ed in ciò spessissimo ha torto, come tra poco si vedrà chiaramente. È in oltre da riflettere ch' egli si conduce in tal suo lavoro da puro traduttore, e non da geometra; poichè in questo caso egli, lungi da trattenersi immensamente, come ha fatto, su interpetrazioni di semplici voci, avrebbe dovuto porsi ad attentamente esaminare se nel suo codice esistevano tutte, o almeno alcune correzioni di que'luogi, ove il Simson, ed anche prima di questo altri geometri avevano trovato guasto il Testo degli Elementi; o pure quando egli fosse stato di contraria opinione, avrebbe dovuto far conoscere le sue ragioni, per credere, che quelli, e tutti gli altri geometri dopo loro, i quali gli hanno seguiti, si fossero ingannati. Or nulla di ciò ha fatto il traduttore francese, che anzi, per tutto, si è limitato a semplicemente confrontare il suo codice coll' Euclide Greco-Latino pubblicato dal Gregory è già più di un secolo, contando per nulla, ciò, che in questo intervallo di tempo non piccolissimo si ha potuto da altri fare; e dando così una manifesta mentita all' opinione che l'Europa dotta, ed i suoi stessi più distinti compatrioti si avevano formata del lavoro del Simson sugli Elementi di Euclide (26).

L' Euclide del Peyrard dunque anzichè far progredire gli Elementi verso il riacquisto della loro perfezione, gli ha fatti al contrario retrogradare grandemente,

(25) Basta riportar quì in comprovamento di quello che si è detto la sola opinione del Montucla, il quale termina il suo articolo sugli ottimi espositori e comentatori di Euclide dicendo:

sicchè veruna obbligazione dee aversegli per tanta fatica da lui sofferta in tradurre il suo codice in due lingue.

Ma oltre a ciò si ravvisano in tal versione de' positivi errori, de' quali ne noteremo quì qualche uno de' principali, ed avvenuti ne' luoghi ove erano più facili a ravvisarsi. I°. Manca in tal codice, e quindi nella versione di esso la definizione della *ragion composta*; e basta per poco esser geometra per conoscere quanto grave errore sia questo. Una tale omissione però è consentanea alla maniera di pensare del Peyrard, poichè egli in una prima versione francese che diede de' libri geometrici di Euclide, stampata in Parigi in 8° nel 1804, ne saltò, come inutile nella maniera come il Geometra greco l'aveva esposto, non meno che il V° libro, pretendendo che fosse bastante il dare aritmeticamente le teoriche in esso contenute; ma poi non avvertì di non ritenere nel resto degli Elementi quelle dimostrazioni Euclidee, ove le verità del V° libro si trovano applicate secondo il principj, e'l metodo di Euclide. Egli dunque avrà similmente pensato questa volta per la definizione della ragion composta.

» Enfin pour terminer une recension, qui deviendroit fastidieuse,
» et nous borner à ce qui il y a de mieux, nous citerons l'édi-
» tion latine des 8 livres d' *Euclide* donnée en 1756 a Glasgow
» in 4. par M. *Robert Simson*. Il y en a eu une édition en
» anglais. M. *Simson* qui a particulièrment cultivé le Géométrie
» ancienne y retablit diverses démonstrations qu' il montre n' être
» pas entièrement conformes au vrai sens d' *Euclide*. Elle fait
» d' ailleurs honneur aux presses de Glasgow; et c'est aujourd'hui
» le livre classique des Elémens de Géometrie dans les Universi-
» tés angloises.

II° All' ordinaria enunciazione della Prop. 22. del I° Lib. degli Elementi, che nella maniera come trovavasi esposta in tutti i codici, e presso tutti gli espositori era completa e perfetta, vi si trova nel codice del Sig. Peyrard inutilmente aggiunto in fine; *quia et omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt omnifariam sumpti.*

III° Per la Prop. 24. del Lib. III° s' incontra nel codice del Peyrard una variante, la quale però è assolutamente inutile, non correggendo affatto il Testo come convenivasi, giusta l'indicazione e la correzione del Simson e nostra (*Ved.: una tal Prop. e la nota corrispondente.*)

IV° Inoltre il Corollario della Prop. 5. del Lib. IV° trovasi in quel codice errato del pari che negli altri; se non che in vece di dirsi, come in tutti questi: *extra BC*, si trova detto *extra triangulum.*

V° Lo stesso Peyrard confessa di aver trovato nel suo codice, corrotto il Testo della Prop. 4 del Lib. V°, ed in fatti lo ha dovuto accomodare.

VI° Il Corollario della Prop. 19. del lib. V° fu trovato dal Gregory sì guasto, che credè necessario di doverlo cambiare, per dargli un senso ragionevole; e prima di lui il Clavio gliene aveva dato l' esempio. Roberto Simson trasse da questo Corollario un argomento forte ed irrefragabile, per dimostrare quanto era stato corrotto dagl' imperiti il Testo di Euclide. Intanto il codice del Signor Peyrard ritiene questo Corollario tal quale era, e solamente vi si trova supplita una dimostrazione della verità in esso contenuta; il che per altro trovasi anche fatto nell'Euclide del Commandini, ed in altri.

VII° Trovavasi nel codice del Sig. Peyrard dopo

la prop. 7 del lib. V° un Corollario, ch' egli ha soppresso. Gli Accademici, che fecero il secondo rapporto sulla sua versione, nel 21 Febbrajo 1814, ragionano a questo proposito nel seguente modo: *questo Corollario contiene una proposizione vera, utile, e che manca in questo libro, fuorchè nell' edizione del Vaticano; ma che però non deriva dalla proposizione suddetta. Simson ha data a parte questa proposizione nel suo Euclide, ed è quella segnata colla lettera B. Nella maniera moderna di trattar le proposizioni, questo teorema è evidente; basterà perciò di trovarne l' enunciazione nelle varianti; ma potrebbe figurare nel Testo come una nota*. Or noi lasciamo a chi legge il giudicar di questo discorso degli Accademici Francesi, e ci basta solamente il far osservare che in tal luogo, ed essi, e'l Sig. Peyrard si hanno dovuto allontanare dal loro codice.

In somma, per non andar più a lungo sopra di ciò ragionando, basta dire, che non v' ha luogo guasto nel Testo di Euclide de' primi sei libri degli Elementi, che non si ritrovi ancora corrotto nel codice n°. 190, e nella versione di esso fatta dal Sig. Peyrard; ed aggiugnerò a questo, che gli stessi Accademici Francesi notano nel loro rapporto poc' anzi detto molti luoghi, ne' quali il Testo del Gregory è più corretto di quello di cui si è servito il Sig. Peyrard. Nulla dirò del Testo de' due libri XI° e XII°, i quali si può dedurre dalle nostre Note di quante correzioni avevano bisogno; e di queste alcuna non se ne incontra nel Testo, e nella versione del Sig. Peyrard.

Ma l' inutilità del lavoro del traduttore Francese si potrà a colpo d' occhio conoscere da chiunque si ponga

a considerare per poco le varianti da lui aggiunte in fine di ciascun volume della sua opera; poichè si vedrà, che tali varianti non consistono che in pure diversità di voci, le quali per nulla contribuiscono al perfezionamento tanto desiderato del Testo di Euclide. I libri di questo Geometra, ognuno l'intende, sono opere di scienza e di verità, e non di amena letteratura e di gusto; di maniera che la correzione delle voci, e delle frasi, come sogliono esprimersi i grammatici, potesse contribuire a migliorarli; perciò su questo proposito coloro che furono nominati Commissarj pel primo rapporto fatto dalla Classe di Matematiche dell'Istituto di Francia, avvedutamente dissero: *queste varianti non sono tutte della medesima importanza, e non meritano sempre la preferenza sulle lezioni impresse. Fra esse se ne incontrano alcune, che non consistono che in parole omesse nelle edizioni anteriormente pubblicate, ec.*

Ma nè meno in queste varianti di voci il Peyrard è stato molto felice; e perciò il suo Testo e le sue versioni non meritano la preferenza sugli altri, in fatti egli adopera sempre la semplice voce *recta*, laddove negli altri codici si trova sempre usata l' espressione *recta linea*, e con più ragione; la qual maniera di dire fu anche costantemente usata da Archimede, da Apollonio, e da altri Geometri antichi. E simili difetti s'incontrano anche in moltissimi altri luoghi.

Da tutto il fin quì accennato si rileva chiaramente, ch' è stata una falsa opinione del Peyrard quella di credere di essersi imbattuto in un codice di Euclide più corretto degli altri già conosciuti: ed è forse da presupporsi, che un tal codice, esistendo in Italia, ove le prime versioni di Euclide ebbero luogo, ed in una rino-

matissima ed antichissima Biblioteca, fosse stato da que' Matematici che si occuparono a farle riconosciuto per più imperfetto che gli altri, ond'è che non vi si attennero.

Non debbo però quì tralasciare di dire, per la verità, che è una pregevole variante nel codice scelto dal Peyrard quella di trovarvisi per postulato sesto la verità riportata negli altri codici per decimo assioma. E veramente non aveva essa la natura di un assioma, essendo una conseguenza manifesta della definizione quarta; come tra i postulati, e non tra gli assiomi si trovava già negli altri migliori codici la verità che: *tutti gli angoli retti sono uguali*, la quale è conseguenza della definizione di quest' angolo. L' altra correzione riguardante la prop. 7. del I° libro non è nel codice Greco di cui si è servito il Sig. Peyrard; essa è sua propria, ed è giudiziosa. Egli ha fatto vedere, come prolungandosi due rette nella figura del primo caso di tal proposizione, e supplendovi la figura pel secondo caso, si poteva la sola dimostrazione che trovasi in tutt'i codici adattare ad entrambi i casi; e dopo di ciò egli soggiunge: *Omnes Commentatores in errore versabantur. Figura incompleta erat in omnibus editionibus. Secundam descripsi figuram, produxi rectas BC, BD, et demonstratio completa fuit in textu graeco nulla voce mutata.* Ma poi avendo incontrata la dimostrazione di tal proposizione per intero nell' Euclide di Campano, ed in quello di Nassir-Eddin, si è rimasto dal pensare che fosse stata quella mancanza un semplice error di figura, ed ha riconosciuta come degna di Euclide quest' altra maniera di dimostarla (28). Ma intorno a ciò si veg-

(28) *Pref. al Vol. II. pag.* VII.

ga la nostra Nota a tal proposizione, ove si troverà un più distinto e particolare ragionamento. L'altra cosa che merita di essere notata nel codice di cui si è servito il Sig. Peyrard, ell'è il trovarsi dopo i tredici libri degli Elementi, che sono in effetto di Euclide, il libro de' Dati, e poi i libri XIV° e XV° aggiunti ad Euclide da Ipsicle Alessandrino, o da altri.

Resta ora a dir qualche cosa brevemente de' rapporti, che su tal versione del Sig. Peyrard ha dati l'Istituto di Francia, come di sopra si è accennato: e se mai in questo esame gli troveremo in qualche parte poco esatti, ciò non dovrà per nulla derogare a quel rispetto grandissimo che l'Europa ha giustamente concepito per que' sommi uomini che ne sono stati gli autori.

Ed a proposito della definizione della ragion composta, di cui sopra abbiamo parlato, i Commissarj pel primo rapporto vanno rintracciando di render ragione del perchè essa non si rinvenga nella versione del Peyrard; poichè, essi dicono, una tal definizione che trovasi in tutti gli altri manoscritti greci, in questo è una semplice nota a piè di pagina, donde credono che sia passata nel Testo, e soggiungono: *Roberto Simson ha scritte sei pagine in 4°. contro questa cattiva ed inutile definizione: ed essa non è di Euclide.* Ma Roberto Simson non ha mai creduta di Euclide, bensì di Teone la cattiva definizione di cui si parla, ed ha creduto fermamente che non debba stare nel luogo ove si trova, cioè, tra quelle del lib. VI°; laonde sta bene che in questo codice stia a piè di pagina: ma non perciò la definizione della ragion composta doveva mancare negli Elementi, e non trovarsi nel proprio suo luogo tra quelle del V° libro; che perciò

il codice del Sig. Peyrard è in questa parte anche mutilato come gli altri; e solamente ci mostra, che tal definizione sia stata intrusa tra quelle del Lib. VI° dopo di averla enormemente corrotta; se pure il trovarsi a piè di pagina non sia stato per semplice accidente, per averla il copista dimenticata di scrivere nel Testo.

Gli Accademici incaricati del secondo rapporto, cominciano poi a dare come principal variante essenziale, il ritrovarsi in questo codice ridotte tra postulati tre proposizioni, che le edizioni precedenti avevano situate tra gli assiomi; ciò non è però vero di tre; ma di una sola, di cui sopra abbiamo parlato.

Essi in oltre asseriscono, che l'edizione greca del Gregory è una copia di quella di Basilea di cui ha ritenuti anche gli errori più palpabili; che i diversi manoscritti al n°. di 23 contenuti nella allor Biblioteca Imperiale, sono poco differenti tra loro; ma che differiscono però molto da quello n°. 190, e noi abbiamo veduto che tal differenza sia in peggio è non in meglio, e ci spiace che que' dotti Commissarj non ci abbiano indicati quegli errori dell'edizione di Basilea seguita dal Gregory, de' quali essi parlano.

Si critica grandemente il Simson, perchè: *per una superstizione inescusabile in un traduttore, ha l'aria di stabilire come un assioma, ch'è impossibile ch' Euclide siasi mai ingannato, o che abbia avuta la minima distrazione.* Ma Simson non parla quì come un semplice traduttore, bensì da Geometra profondamente conoscitore del merito degli antichi; nè ciò ch' egli dice è sua asserzione, che anzi è la più sana autorità degli antichi stessi, conservataci da Pappo, (*Vegg. la Not. n°. 19*). E questa eccellente qualità di Euclide è stata prima

del Simson conosciuta e confessata da quanti Geometri hanno in qualche maniera coltivata la Geometria degli antichi; e le opinioni vantaggiose de' principali di questi si troveranno anche quì appresso registrate, non essendo quì opportuno il recarle. Non è dunque il solo Roberto Simson esageratore dell' esattezza Euclidea, perchè traduttore degli Elementi.

I suddetti Accademici in oltre, non danno alcuna prova della loro assertiva, che il manoscritto su cui ha lavorato il Sig. Peyrard la sua versione sia il vero Testò di Euclide, mentre gli altri sono copiati sull'edizione data da Teone, o da altri comentatori dopo lui.

Un tratto però osservabilissimo del loro rapporto si è, il trovarsi da essi pronunziato, che: *ciò che distingue gli Elementi di Euclide sono meno i teoremi stessi, e l' ordine nel quale gli ha fatti derivare gli uni dagli altri, che la maniera come gli ha dimostrati*, soggiugnendo pochi versi dopo, che: *il merito principale di Euclide consiste nel cammino rigoroso che ha seguito in tutte le sue dimostrazioni*. Ma io dimando loro, questo cammino rigoroso non è forse conseguenza del metodo che ha tenuto? E la precisione e 'l rigore di dimostrare Euclideo da che altro mai dipende, se non dal nesso ed ordine col quale ha egli disposte le proposizioni. Il Signor Montucla, unò di que' dotti Matematici francesi, che non parlava a caso, a proposito degli Elementi di Euclide si esprime così: *Egli (Euclide) vi mise quella catena sì ammirata dagli amatori del rigor geometrico, e ch' è tale, che non v' ha proposizione, la quale non abbia relazioni necessarie con quelle che la precedono e che la seguono*; e ciò che dice il Montucla era il sen-

timento del Leibnitz, e del Newton. Ma senza queste autorità, bisogna non conoscere affatto ciò che sia metodo di dimostrár rigoroso in Geometria, per poter dire: *queste verità sono ben dimostrate, ma non è ciò conseguenza dell' ordine col quale sono connesse fra loro e disposte.* Ciò non ostante i Signori Commissarj convengono, ch' Euclide dimostri bene; e non so poi capire come soggiungano, che: *il suo metodo ha trovati più panegiristi, che imitatori. Che la maniera di dimostrare di Euclide è passata di moda. Che essa forma oggigiorno un* linguaggio *poco conosciuto.* È dunque passata di moda, e ciò pur troppo è vero, con gran danno della Geometria, la maniera di dimostrar rigorosa. Ma poi cosa significa, che la maniera di dimostrare *forma un linguaggio*; essa costituisce un metodo; e v' ha ben differenza tra metodo e linguaggio. Convengono essi dopo ciò nel giudicare, che: *sarebbe necessario, che tal linguaggio* (piuttosto metodo di dimostrare) *fosse più conosciuto*; *poichè, abituandosi di buon' ora al rigor geometrico di cui spirano le opere di Euclide, si sarà in grado di seguire le dimostrazioni più lunghe di Archimede e di Apollonio*; *e questo studio sarà un esercizio utile per abituarsi al rigore delle dimostrazioni, dal quale siamo troppo disposti ad allontanarci.* In seguito, continuando eglino a discorrere senza prove, arrivano fino a dire, che: *uno non sarebbe ascoltato, se proponesse oggigiorno di cominciar lo studio delle Matematiche da Euclide; ma si dirà una cosa vera assicurando, che ogni Geometra farà bene a studiarlo una volta in sua vita in intero, per avere un' idea netta di questo gene-*

re di dimostrazioni , e mettersi in istato d' impiegarle all'uopo. Che contraddizione! Che differenza tra ciò ch'essi dicono , e 'l sentimento degl' illustri Geometri del principio del passato secolo , tra quali il Newton , e quello dello stesso loro collega la Grange , che al riferir del Sig. Peyrard soleva esprimersi dicendo: *La Geometria é una lingua morta, e colui che non istudia la Geometria in Euclide fa la cosa stessa, che quello il quale volesse apprendere il Greco ed il Latino leggendo le opere moderne scritte in queste due lingue!* (29)

Ma per non istar quì a ridire una per una tutte le cose che quegli Accademici dicono nel loro rapporto, conchiuderò col far osservare, ch'essi fanno la satira alla versione del Sig. Peyrard, mentre ne vogliono fare l'elogio; poichè asseriscono che l' edizione di Parigi è conforme all'edizione latina di Campano fatta dietro l'arabo, ed alla traduzione latina di Zamberto fatta dietro il testo greco, prima dell' edizione di Basilea. Or è riconosciutissimo che la versione di Campano e quella di Zamberto sono difettosissime; e tutti coloro che hanno voluto ben fare in riprodurre e comentare Euclide , si sono sempre da queste versioni allontanati , ed essi hanno riconosciuta come migliore quella del Commandini fatta sul testo greco. Così il Gregory , così il Brigg , così il Keill, così il Simson , e così tutti gli altri Geometri moderni.

---

(29) *Pref. al I. Vol. in principio.*

OPINIONI DI ALCUNI DOTTI SUL MERITO DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

Non la finirei giammai, se volessi quì recare ciò, che tutt' i sommi Geometri antichi e moderni hanno detto in favore degli Elementi di Euclide, de' quali già abbastanza si dee conoscere il merito da quello che finora si è esposto. Un tal libro ha servito di base, tra gli antichi, a tutti gli scrittori di cose Matematiche, tra i quali basta nominar solamente Archimede ed Apollonio, che nelle loro ricerche geometriche prendono le cose esposte da Euclide come principj a tutti noti, e rigorosamente dimostrati; abbiamo già di sopra detto, che Pappo lo chiama un *Geometra accurato*, soggiugnendo poi, che *non si è mai ingannato*; e Proclo tra gl'infiniti luoghi ove ne tesse le più alte lodi, in uno dice così; *Volumina* (Euclidis) *admirandae diligentiae*, *peritaeque cujusdam considerationis pleni*; ed in un altro esclama: *Quis non Euclidis Elementa admiretur*, *in quibus superiorum Elementa omni genere laudis longissime superavit.*

Tra i moderni poi potrei citarne infiniti; ma sarà meglio che i curiosi indagatori di tali notizie consultino le dottissime Prefazioni del Clavio, del Keill, e del Gregory alle rispettive loro esposizioni degli Elementi, e principalmente le Prolusioni dell' egregio Errico Savilio per la Cattedra da lui fondata nel Colle-

gio di Oxford (30). ove troveranno trascitte le opinioni di Pietro Ramo, e del Cardano, il primo de' quali parlando degli Elementi di Euclide si esprime così: *Nullus paralogismus, nulla pseudographia, in totis Elementis, nobis, quanquam severe inquirentibus, animadverti potuit* (31): e l'altro nel XIII° libro *de Subtilitate* dice a tal proposito: *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta, ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas. Quibus fit, ut adeo veritatis lux in eo refulgeat; ut soli hi in arduis quaestionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habent familiarem*: ed il Gregory nel riportar la poc' anzi detta opinione del Cardano nella Prefazione al suo Euclide, la fa precedere dicendo: *Corpus hoc Elementorum ea claritate et evidentia, et judicio ac fortitudine compactum est, ut singulae in iis propositiones, jam a bis mille annis, ab omnibus haberentur pro evidentibus, et*

(30) Quest' uomo molto benemerito della Geometria, per le sue cognizioni, si rese anche singolare, per aver fondata a sue spese una Cattedra di Matematiche nel Collegio di Oxford, ond'è che il Professore che l'occupa chiamasi *Saviliano*: esempio, che spesso si è veduto in Inghilterra, e che pur tra noi ebbe luogo una volta in persona di Bartolomeo Intieri. Ma la Cattedra d' Inghilterra rinnova sempre alla posterità il nome di Errico Savilio, e quindi muove negli altri lo stimolo della gloria per imitarlo; e la Cattedra creata dall' Intieri non è conosciuta, che da pochissimi amatori delle Memorie Patrie; nè ora, grazie alle continue riforme della nostra Università di Studj, è restato affatto vestigio di tal creazione.

(31) *Scholae Mathematicae* lib. III. pag. 75.

pro talibus ab omnibus passim citentur. Il Newton grande ammiratore dell' ordine, e del metodo Euclideo si doleva, essendo già Geometra consumato: *quod perfecto nondum Euclide ea diligentia, quae adhiberi in tanto auctore debuerat, ad Cartesium aliosque propera quadam cura descendisset.* Ed il Wolfio unendosi di opinione al suo Maestro Leibnitz, dice a tal proposito: *Praeter nos alii etiam Mathematici agnoverant, reformatores Elementorum Euclidis non fuisse in ausu suo satis felices; sed Euclidis Elementis palmam adhuc merito tribuendam esse. Memini hanc fuisse Leibnitio sententiam, cum me inviseret, dum Elementis Geometriae concinnandis operam darem, ipsique referrem, me multiplici modo tentasse, ut eo ordine Elementa Geometriae digererem, quo usus est Bernardus Lamy; sed nunquam hoc fieri potuisse, nisi quaedam assumerem absque demonstratione quae essent demonstranda, vel in demonstrando, ac definiendo admitterem confuse tantummodo percepta* (32). Ed egli stesso altrove aggiunge: *Opus hoc illustre inter ea eminet, quae ex antiquitate ad nos pervenerunt, ita ut providentiae divinae tribuendum sit, quod injuria temporum non interciderit.* (33).

Ma per porre fine ad una materia interminabile, trascriverò qui, ciò che il Signor Montucla ed altri presenti storici delle Matematiche hanno detto a questo

---

(32) *De praecipuis scriptis Mathematicis cap. III.*
(33) *Ibidem* § 2.

proposito; anche perchè costoro, essendo ultimi, dovranno far tacere quelli, che credono, che a' dì nostri debba tutto esser nuovo. Il Montucla dunque si esprime nel modo seguente (34) » C' est sur tout á ses Élémens, qu' *Euclide* doit la célébrité de son nom. Il » ramassa dans cet ouvrage le meilleur encore de tous » ceux de ce genre, les vérités élèmentaires de la Géométrie, découvertes avant lui. Il y mit cet enchaînement si admiré par les amateurs de la rigueur géométrique, et qui est tel qu' il n' y a aucune proposition qui n' ait des rapports nécessaires avec celles » qui la précèdent ou qui la suivent. En vain divers » Géomètres à qui l' arrangement d' Euclide a déplu, » ont tâchè de le réformer, sans porter atteinte à la » force des démonstrations. Leurs efforts impuissants ont » fait voir combien il est difficile de substituer à la » chaîne formèe par l' ancien géomètre, une autre aussi » ferme et aussi solide.

Il Bossut parlando degli Elementi di Euclide dice (35) » Jamais livre de science n' a eu un succes » comparable à celui des élémens d' Euclide. Ils ont » été enseignés exclusivement, pendant plusieurs siécles, » dans toutes les ècoles de Mathematiques, traduits et » commentés dans toutes les langues : preuve certaine » de leur excellence. » Ma dopo ciò il Bossut seppe più ammirarli, che apprezzarli, ed imitarli.

Finalmente è degno di esser quì recato ciò che sul

(34) Histoire des Mathèmatiques. Part. I. liv. 4.

(35) Essai sur l' histoire des Mathématiques, Période I.

proposito dice con molta verità, e precisione il Signor Ab. Andres nella sua *Storia di ogni Letteratura*, tanto più che il giudizio ch' egli dà dee considerarsi come quello de' sommi Geometri suoi contemporanei, principalmente Italiani, co' quali egli conversava nello scrivere la sua opera. » I latini che non li conobbero (*gli » Elementi*) non fecero per molti secoli, che palpar » tenebre, copiando, ed alterando alcuni pochi principj » di Boezio, o di altri ancora men di lui intendenti » della materia: i primi albori della Geometria venne- » ro loro dalle traduzioni, benchè imperfette, degli » Elementi di Euclide fatte da Adelardo, e da Cam- » pano di Novara sulle arabiche; ed i primi maestri » della Geometria de' moderni, il Commandini, il Cla- » vio, il Barrow, ed altri parecchi ancor più moderni » credettero bene impiegate le loro fatiche nel tradurre » e comentare gli Elementi di Euclide. In questo se- » colo solamente si è voluto trovar macchie in quel » luminare della Geometria, e si è tacciata quell'opera » di troppe definizioni, e divisioni scolastiche, di trop- » pa minutezza, e scrupolosità nel dimostrare le cose » da se stesse abbastanza chiare, di troppa sottigliezza, » e di qualche sofisticheria. Lascio a' veri, e profondi » Geometri il decidere della giustezza di queste accuse: » dirò soltanto, che il voto di un Newton, e di un » Leibnitz, i più sublimi Geometri che abbia prodotto » lo spirito umano i quali granlemente approvano il » metodo e l' ordine, l' esattezza e 'l rigore degli Ele- » menti di Euclide; l' approvazione di un Wolfio scrit- » tore sì accreditato in tale materia; le nuove edizioni » del Keill, del Gregory, ed anche a' nostri dì del più » chiaro Geometra dell' Inghilterra Roberto Simson de-

» vono avere maggior forza a favore del greco maestro,
» che quante accuse gli muovono contro alcuni moder-
» ni, per quanto sieno celebrati. E che se il metodo di
» questi dà maggior facilità, ed agevola l' intelligenza
» de' primi Elementi, quello di Euclide reca maggior
» sicurezza alle dimostrazioni, e conduce a maggior pro-
» fondità nello studio di quella scienza; e che ad ogni
» modo gli Elementi di Euclide sono una delle opere,
» che maggior vantaggio hanno prodotto alle scienze,
» e più hanno giovato allo schiarimento dello spirito
» umano.

Dopo tutto ciò potrò anch' io conchiudere, come Gregory (36); *Haec vindicandis Elementis, quae nullo indigent vindice abunde sufficient.*

---

(36) *Praef. in Eucl.*

IL PRIMO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE.

DEFINIZIONI.

I. *Punto* è quel che non ha parti, ovvero, che non hà grandezza.

II. *Linea* è una lunghezza senza larghezza.

III. Gli estremi della linea sono i punti.

IV. La linea *retta* è quella che si distende ugualmente fra i suoi punti.

V. *Superficie* è quella che ha solamente lunghezza, e larghezza.

VI. Gli estremi della superficie sono le linee.

VII. La superficie *piana* è quella che giace ugualmente fra le sue linee [*V. N.*].

VIII. » L' *angolo piano* è l' inclinazione scambievole di due » linee che, giacendo in un piano, si toccano, senza star per » diritto [*V. N.*].

IX. L' *angolo piano rettilineo* è l' inclinazione scambievole di due linee rette giacenti in un piano, che si toccano, senza formare una linea retta continuata [*V.N.*].

X. Allorchè una linea retta insistendo sopra un' altra retta linea fa uguali gli angoli adjacenti, l' uno e l' altro di questi angoli

uguali è *retto*; e la linea retta insistente si chiama *perpendicolare* a quella alla quale soprastà.

XI. L' angolo *ottuso* è quello che è maggiore del retto.

XII. L' angolo *acuto* è quello che è minore del retto.

XIII. *Termine* è l' estremità di qualche cosa.

XIV. *Figura* è quella, che è contenuta da uno, o da più termini.

XV. *Cerchio* è una figura piana contenuta da una linea, che si chiama *circonferenza*, alla quale circonferenza quante linee rette pervengono, tirate da un certo punto che è dentro alla figura, sono tutte uguali fra loro.

XVI. Un tal punto si chiama *centro* del cerchio.

XVII *Diametro* del cerchio è una linea retta che passa per lo centro, ed è terminata da ambe le parti dalla circonferenza [*V. N.*].

XVIII. *Semicerchio* è una figura compresa dal diametro, e dall' una delle due parti, nelle quali questo divide la circonferenza [*V. N.*].

XIX. » *Segmento*, o *porzione* del cerchio è una figura con-
» tenuta da una linea retta, e dall' una delle due parti in cui
» questa divide la circonferenza [*V. N.*].

XX. Figure *rettilinee* diconsi quelle che sono contenute da linee rette.

XXI. Le *figure trilatere*, dette anche *triangoli*, sono contenute da tre linee rette.

XXII. Le *quadrilatere* da quattro linee rette.

XXIII. E le *moltilatere* o *poligone* da più di quattro linee rette.

Delle figure trilatere.

XXIV. Il triangolo *equilatero* è quello che ha tre lati uguali.

XXV. L' *isoscele* è quello che ha solamente due lati uguali.

XXVI. Lo *scaleno* è quello che ha disuguali i tre lati.

In oltre tra le figure trilatere.

XXVII. Il triangolo *rettangolo* è quello che ha un angolo retto.

XXVIII. Il triangolo *ottusangolo* è quello che ha un angolo ottuso.

XXIX. Il triangolo *acutangolo* è quello che ha acuti i tre angoli.

Delle figure quadrilatere.

XXX. Il *quadrato* è quello che ha tutti i lati uguali, e tutti gli angoli retti.

XXXI. Il *rettangolo* è quello che ha retti gli angoli, ma non ha i lati uguali.

XXXII. Il *rombo* è quello che ha tutti i lati uguali, ma non ha gli angoli retti.

XXXIII. Il *romboide* è quello che ha i lati, e gli angoli opposti rispettivamente uguali, ma non ha nè tutti i lati uguali, nè gli angoli retti. [*V. N.*]

XXXIV. Ogni altra figura quadrilatera diversa da queste si chiama *trapezio*.

XXXV. Linee rette *parallele* sono quelle che, esistendo in uno stesso piano, prolungate indefinitamente dall'una, e l'altra parte, non si congiungono mai insieme.

POSTULATI, O DOMANDE.

I. Si domandi: Il poter tirare da qualsivoglia punto a qualsivoglia punto una linea retta.

II. Il poter prolungare una linea retta terminata in continuo, e dirittamente.

III. E descrivere un cerchio con qualsivoglia centro ed intervallo.

IV. Che tutti gli angoli retti sieno uguali tra loro [*V.N.*].

V. » Ed inoltre, che se in due linee rette cada un' al-
» tra retta linea, e faccia gli angoli interiori dalla stessa parte
» minori di due retti; quelle due linee rette prolungate indefini-
» tamente debbano incontrarsi da quella parte, dove gli angoli
» sono minori di due retti [*V.N.*].

VI. E che due linee rette non chiudono spazio [*V.N.*].

ASSIOMI, O NOZIONI COMUNI.

I. Le cose, che sono uguali ad una medesima cosa, sono altresì uguali fra loro.

II. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, i tutti saranno uguali.

III. E se da cose uguali si tolgono cose uguali, i residui saranno uguali.

IV. Se a cose disuguali si aggiungono cose uguali, i tutti saranno disuguali.

V. E se da cose disuguali si tolgono cose uguali, i residui saranno disuguali.

VI. Le cose che sono il doppio di una medesima cosa, sono fra loro uguali.

VII. Le cose che sono la metà di una medesima cosa, sono uguali fra loro.

VIII. Le grandezze che combaciano, *o sia che occupano esattamente lo stesso spazio*, sono uguali fra loro.

IX. Il tutto è maggiore della sua parte.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

Sopra una data retta linea terminata costituire il triangolo equilatero.

Esposizione. Sia la data retta linea terminata AB. [*fig.* 1.]

Determinazione. Fa d'uopo costituire sopra di essa il triangolo equilatero.

Costruzione. Col centro A ed intervallo AB si descriva il cerchio BCD [*post.*3.]: similmente col centro B ed intervallo BA si descriva l'altro cerchio ACE; e dal punto C, nel quale scambievolmente si segano i due cerchi, tirinsi ai punti A, B le linee rette CA, CB [*post.* 1.].

Dimostrazione. Essendo il punto A centro del cerchio CDB, sarà la linea retta AC uguale all' altra AB. [*def.* 15.] E similmente, poichè il punto B è centro del cerchio CAE, sarà pure la BC uguale alla AB: ma si è dimostrato che la CA è uguale alla AB: adunque sì la CA, come la CB è uguale alla AB. Or le cose che sono uguali ad una medesima cosa, sono ancora uguali fra loro [*ass.* 1.]; onde la CA è uguale alla AB; è perciò le tre linee rette CA, AB, BC sono tra loro uguali.

Conchiusione. Quindi il triangolo ABC è equilatero, ed è costituito sopra la data linea retta terminata AB. *Ciocchè bisognava fare* [*V. N.*].

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

Da un punto dato tirare una linea retta uguale ad altra linea retta data.

Sia A il punto dato, e BC la data retta linea [*fig.* 2.]: fa d'uopo tirare dal punto A una linea retta uguale alla data BC.

Dal punto A al punto B tirisi la linea retta AB [*post.*1.], e sopra essa si costituisca il triangolo equilatero DAB [*post.*1.]; poi si prolunghino per diritto le DA, DB verso E, ed F [*post.*2.], e col centro B ed intervallo BC si descriva il cerchio CGH [*post.*3.]; e similmente col centro D ed intervallo DG si descriva il cerchio GKL.

Or poichè il punto B è centro del cerchio CGH, sarà la BC uguale alla BG [*def.* 15.]; e per la stessa ragione, perchè D è centro del cerchio GKL, la DL è uguale alla DG: ed essendo la DA uguale alla DB; la rimanente AL sarà uguale alla rimanente BG [*ass.*3.]: ma si è dimostrata la BG uguale alla BC; quindi tanto la AL, quanto la BC è uguale alla BG. Or le cose che sono uguali ad una medesima cosa, sono fra loro uguali [*ass.*1.]; adunque la AL è uguale alla BC.

E quindi dal punto dato A si è tirata la retta linea AL uguale alla data BC. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Date due linee rette disuguali, tagliare dalla maggiore una parte uguale alla minore.

Le due rette linee date disuguali sieno AB, e C, [*fig.* 3.] delle quali sia AB la maggiore: fa d' uopo tagliare dalla maggiore AB una linea retta uguale alla minore C.

Si tiri dal punto A la linea retta AD uguale alla C [*pr.*2.]; e col centro A ed intervallo AD si descriva il cerchio DEF [*post.* 3.]

Or poichè il punto A è centro del cerchio DEF, sarà la AE uguale alla AD: ma anche la C è uguale alla AD; quindi sì la linea retta AE, come l'altra C sono uguali alla stessa AD; e perciò la AE è uguale alla C [*ass.*1.].

Adunque date due linee rette disuguali AB, C, dalla maggiore AB si è tagliata la AE uguale alla minore C. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, ed hanno anche uguali gli angoli compresi dai lati uguali; avranno ancora la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, ed i rimanenti angoli saranno uguali ai rimanenti angoli, l'uno all'altro, quelli cioè che sono sottesi dai lati uguali, *o sia a' quali sono sottoposti i lati uguali.*

Sieno due triangoli ABC, DEF [*fig.* 4.], i quali abbiano due lati AB, AC uguali a due lati DE, DF, l'uno all'altro cioè il lato AB uguale al lato DE, e 'l lato AC a DF; e sia l'angolo BAC uguale all'angolo EDF: dico ancor la base BC esser uguale alla base EF, il triangolo ABC al triangolo DEF, ed i rimanenti angoli a' rimanenti angoli, l'uno all'altro, a' quali sono sottoposti i lati uguali, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF, e l'angolo ACB all'angolo DFE.

Perciocchè adattandosi il triangolo ABC al triangolo DEF, e posto il punto A sul punto D, e la linea retta AB sulla DE, ancora il punto B si adatterà al punto E, per essere la AB uguale alla DE; ed adattandosi la AB alla DE, eziandio la linea retta AC si adatterà alla DF, essendo l'angolo BAC uguale all'angolo EDF, onde ancora il punto C si adatterà ad F, per l'uguaglianza delle linee rette AC, DF: ma anche il punto B si adattava ad E; laonde la base BC si adatterà alla base EF. Poichè se adattandosi il punto B al punto E, e 'l punto C all'altro F, la base BC non si adatti alla base EF; due linee rette comprenderanno spazio, che non può essere [*post.*6.]. Laonde la base BC si adatterà alla base EF, e sarà uguale ad essa [*ass.*6.]; e perciò tutto il triangolo ABC combacerà con tutto il triangolo DEF, e gli sarà uguale [*post.*8.]; ed i rimanenti angoli

ABC, ACB combaceranno co' rimanenti angoli DEF, DFE, e saranno uguali ad essi, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF, e l'angolo ACB all'angolo DFE.

Se dunque due triangoli; *ed il resto come nell'enunciazione. — Ciocchè bisognava dimostrare.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Gli angoli sopra la base de' triangoli isosceli sono uguali fra loro: e prolungandosi i lati uguali, saranno anche fra loro uguali gli angoli sotto la base.

Sia il triangolo isoscele ABC [*fig.* 5.], che abbia il lato AB uguale al lato AC; e si prolunghino i lati AB, AC verso D, ed E: dico esser l'angolo ABC uguale all'angolo ACB, e l'angolo CBD all'angolo BCE.

Si prenda nella linea retta BD qualsivoglia punto F; poi dalla maggiore AE si tagli la AG uguale alla minore AF [*pr.*3.], e giungansi le linee rette FC, GB [*post.* 1.].

Ed essendo la AF uguale alla AG, e la AB alla AC, le due linee rette FA, AC sono uguali alle due GA, AB, l'una all'altra, e comprendono l'angolo comune FAC; adunque la base FC è uguale alla base GB, ed i rimanenti angoli ACF, AFC sono uguali ai rimanenti angoli ABG, AGB, l'uno all'altro [*pr.*4.].

In oltre tutta la linea retta AF è uguale a tutta l'altra AG, ed è la AB uguale alla AC; adunque sarà le rimanente BF uguale alla rimanente CG [*ass.* 3.]: ma si è dimostrato esser la FC uguale alla GB; che perciò due lati BF, FC del triangolo BFC sono uguali a due lati CG, GB del triangolo CGB, l'uno all'altro, e l'angolo BFC è uguale all'angolo CGB; sarà quindi il triangolo BFC uguale al triangolo CGB, ed i rimanenti angoli saranno uguali ai rimanenti angoli, l'uno all'altro, quelli cioè che sono sottesi da' lati

uguali [*pr*.4.]: perciò l'angolo FBC è uguale all'angolo GCB, e l'angolo BCF all'angolo CBG. Essendosi pertanto dimostrato tutto l'angolo ABC uguale a tutto l'angolo ACF, e la parte CBG del primo uguale alla parte BCF dell'altro, saranno pure uguali le rimanenti parti, cioè gli angoli ABC ed ACB [*ass*.3.], che sono sopra la base del triangolo ABC. Ma si è anche dimostrato l'angolo FBC uguale all'angolo GCB, i quali sono sotto la base.

Adunque in ogni triangolo isoscele ec. -- *C.B.D.*

Corollario.

Quindi ogni triangolo equilatero è anche equiangolo [*V.N.*].

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due angoli d'un triangolo sono uguali; i lati che sottendono gli angoli uguali, saranno altresì uguali fra loro.

Sia il triangolo ABC [*fig*. 6.], che abbia l'angolo ABC uguale all'angolo ACB: dico che il lato AC sia uguale al lato AB.

Perciocchè se la AC non è uguale alla AB, una di esse sarà la maggiore. Sia questa la AB; e dalla maggiore AB si tagli la DB uguale alla minore AC, e giungasi CD.

Ed essendo la DB uguale alla AC, e la BC comune, saranno le due DB, BC uguali alle due AC, CB, l'una all'altra; è pure l'angolo DBC uguale all'angolo ACB; onde il triangolo DBC sarà uguale al triangolo ACB [*pr*.4.]; il minore al maggiore, che è assurdo. Non è dunque la AB disuguale alla AC, ma bensì uguale.

Perciò se due angoli di un triangolo *ec.* -- *C.B.D.*

COROLLARIO.

Laonde ogni triangolo equiangolo è anche equilatero. [*V.N.*].

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Sopra di una stessa base, dalle medesime parti, non si costituiranno due triangoli distinti, che abbiano i lati uguali, l'uno all'altro.

Imperocchè se può essere [*fig.*7.], sopra la retta linea AB, dalle medesime parti di essa, sieno costituiti i due triangoli distinti ACB, ADB, che abbiano uguali i lati, l'uno all'altro, cioè il lato AC al lato AD, e 'l lato BC al lato BD: non potrà mai il punto D cadere in uno de' lati AC, CB; poichè la parte sarebbe uguale al tutto; che perciò giungasi la CD; potrà tal congiungente cadere o fuori di ciascuno de' triangoli ACB, ADB, o dentro uno di essi.

Cada primieramente fuori [*fig.*7. *n.*1.]. Or poichè nel triangolo ACD i lati AC, AD sono uguali, l'angolo ACD sarà uguale all' angolo ADC [*pr.*5.]: ma l'angolo ACD è maggiore dell'angolo BCD; perciò anche l'angolo ADC è maggiore dello stesso BCD, e per conseguenza l'angolo CDB è molto maggiore dell'angolo DCB. Similmente perchè nel triangolo BCD il lato BC è uguale all' altro BD, l'angolo CDB sarà uguale all' angolo DCB: ma si è anche dimostrato esserne maggiore; che è impossibile.

Che se CD [*fig.*7.*n.*2.] si supponga cader dentro uno de' triangoli ACB; si producano le linee rette AC, AD in E, F

E poichè nel triangolo CAD i lati uguali AC, AD sono prolungati in E ed F, sotto la base, sarà l'angolo FDC uguale all' angolo ECD [*pr.* 5.]: ma per essere BC uguale a BD, l' angolo BCD è uguale all' angolo BDC; ed è l'angolo BDC

maggiore dell' angolo FDC: adunque anche l'angolo BCD dovrà esser maggiore dell' angolo ECD; e perciò la parte sarebbe maggiore del tutto, che è impossibile [*ass.* 9.].

Quindi sopra di una stessa base ec. — *C.B.D.* [*V.N.*]

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, ed hanno la base uguale alla base; avranno uguali gli angoli contenuti dai lati uguali.

I due triangoli ABC, DEF [*fig.* 8.] abbiano due lati AB, AC uguali a due lati DE, DF, l'uno all'altro, cioè AB a DE, ed AC a DF, ed abbiano pure la base BC uguale alla base EF: dico ancora l'angolo BAC essere uguale all'angolo EDF.

Perciocchè adattandosi il triangolo ABC al triangolo DEF, e posto il punto B sul punto E, e la linea retta BC sulla EF; dovrà cadere il punto C sull' altro F, per essere la BC uguale alla EF: e combaciando BC con EF, combaceranno anche le linee rette BA, CA con le ED, DF; poichè se la base BC combacerà colla base EF, ed i lati BA, AC non combacino co' lati ED, DF, ma cadano distintamente, come EG, GF, si saranno costituiti sopra di una stessa base, dalle medesime parti, due triangoli distinti, che hanno i lati uguali, l'uno all'altro: ma non si possono costituire [*pr.* 7.]. Adunque combaciando la base BC colla base EF, i lati BA, AC debbono combaciare co' lati ED, DF; e quindi l'angolo BAC combacerà coll' angolo EDF, e gli sarà uguale.

Se dunque due triangoli abbiano ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Dividere per metà un dato angolo rettilineo.

Sia BAC l'angolo rettilineo dato [*fig.* 9.] : fa d'uopo dividerlo per metà.

Si prenda nella retta linea AB qualsivoglia punto D, e dalla linea retta AC si tagli la AE uguale alla AD [*post.*3.], e giunta DE, costituiscasi sopra essa il triangolo equilatero DEF [*pr.* 1.], e tirisi la AF : dico che l'angolo BAC è diviso per metà dalla linea retta AF.

Imperocchè essendo la AD uguale alla AE, e la AF comune, saranno le due DA, AF uguali alle due EA, AF, l'una all'altra ; è pure la base DF uguale alla base EF ; quindi l'angolo DAF sarà uguale all'angolo EAF [*pr.* 8.].

E perciò l'angolo rettilineo dato BAC è diviso per metà dalla linea retta AF. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Dividere per metà una data linea retta terminata.

Sia AB la data retta linea terminata [*fig.*10]: fa d'uopo dividerla per metà.

Costituiscasi sopra essa il triangolo equilatero ACB, e si divida l'angolo ACB per metà colla linea retta CD [*pr.* 9.] : dico che la linea retta AB sia divisa per metà nel punto D.

Perciocchè essendo la AC uguale alla CB, e la CD comune, le due AC, CD sono uguali alle due BC, CD, l'una all'altra ; e l'angolo ACD è uguale all'angolo BCD ; adunque la base AD è uguale alla base DB [*pr.* 4.].

Quindi la data linea retta terminata AB è divisa per metà nel punto D. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Tirare una linea retta perpendicolare ad una data retta linea, da un punto dato in essa.

Sia data la linea retta AB [*fig.* 11.], ed in essa il punto C: fa d'uopo tirare dal punto C una linea retta perpendicolare alla AB.

Si prenda nella AC qualsivoglia punto D, si ponga la CE uguale alla CD, e sopra la DE costituiscasi il triangolo equilatero FDE, e giungasi FC: dico che alla data linea retta AB, dal punto C dato in essa, si è tirata la perpendicolare FC.

Poichè la CD è uguale alla CE, ed è comune la FC; le due linee rette CD, CF sono uguali alle due EC, CF, l'una all'altra, e la base DF è uguale alla base EF; adunque l'angolo DCF è uguale all'angolo ECF, e sono conseguenti. Or quando una linea retta insitendo sopra un'altra linea retta fa uguali gli angoli adjacenti, ciascuno degli angoli uguali è retto [*def.* 10.]; adunque è retto ciascuno degli angoli DCF, FCE.

E però si è tirata la linea retta FC perpendicolare alla data retta linea AB, dal punto C dato in essa. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Tirare la perpendicolare sopra una data linea retta interminata, da un punto dato, che non sia in essa.

Sia data la linea retta interminata AB [*fig.* 12.], e dato il

punto C, che non sia in essa: fa d'uopo tirare dal dato punto C la perpendicolare sopra la data linea retta interminata AB.

Si prenda dall'altra parte della linea retta AB qualsivoglia punto D, e dal centro C, coll'intervallo CD si descriva il cerchio EFG; indi si divida la EG per metà in H [*pr.* 10.], e tirinsi le CG, CH, CE: dico che sulla data linea retta interminata AB, dal dato punto C, che non è in essa, si è tirata la perpendicolare CH.

Imperocchè essendo la GH uguale alla HE, e la CH comune, le due GH, HC sono uguali alle due EH, HC, l'una all'altra; la base CG è uguale alla base CE; adunque l'angolo CHG è uguale all'angolo EHC [*pr.*8.]; e sono adjacenti. Ma quando una linea retta insistendo sopra un'altra retta linea fa uguali gli angoli adjacenti, ciascuno degli angoli uguali è retto, e la linea retta insistente, si chiama perpendicolare a quella a cui soprastà [*def.* 10.].

Quindi si è tirata la perpendicolare CH sopra la data linea retta interminata AB, dal dato punto C, che non è in essa. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se una linea retta, insistendo sopra un'altra linea retta fa angoli, o gli farà amendue retti, o presi insieme uguali a due retti.

La linea retta AB [*fig.*13.] insistendo sopra l'altra CD, faccia gli angoli CBA, DBA: dico che questi angoli, o sono amendue retti, o presi insieme uguali a due retti.

Imperocchè se l'angolo CBA è uguale all'angolo ABD, sono questi due angoli retti; ma se nò, dal punto B si tiri la BE perpendicolare alla CD [*pr.* 11.]; saranno perciò retti gli angoli CBE, EBD. Or poichè l'angolo CBE è uguale ai due

angoli CBA , ABE ; se aggiungasi di comune l' angolo EBD , gli angoli CBE, EBD saranno uguali ai tre angoli CBA, ABE , EBD. Similmente, poichè l'angolo DBA è uguale agli angoli DBE , EBA , se si aggiunga di comune l' angolo ABC, gli angoli DBA, ABC saranno uguali ai tre altri angoli DBE , EBA , ABC: si sono poi dimostrati gli angoli CBE , EBD uguali a questi stessi tre, e le cose uguali ad una medesima cosa, sono uguali tra loro [*ass.* 1.]; quindi gli angoli CBE, EBD sono uguali agli angoli DBA, ABC: ma gli angoli CBE, EBD sono due retti; perciò anche gli angoli DBA, ABC saranno uguali a due retti.

Se dunque una linea retta , ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se ad una linea retta , e ad un punto che sia in essa , due altre linee rette non poste dalle medesime parti , facciano gli angoli adjacenti insieme uguali a due retti ; queste due linee rette saranno per diritto fra loro.

Ad una linea retta AB , e al punto B ch'è in essa, [*fig.*14.] le due altre linee rette BC , BD , non poste dalle medesime parti , facciano gli angoli ABC , ABD insieme uguali a due retti : dico che la linea retta BD sia per diritto alla BC.

Imperocchè se la BD non è per diritto alla BC, sia la BE per diritto alla CB. Or la linea retta AB insistendo sopra la linea retta CBE, gli angoli ABC , ABE sono uguali a due retti [*pr.* 13.]: ma anche gli angoli ABC , ABD sono uguali a due retti; onde gli angoli CBA, ABE sono uguali agli angoli CBA, ABD : tolgasi di comune l'angolo CBA; il rimanente angolo ABE dovrà essere uguale al rimanente ABD [*ass.*3.], il minore al maggiore; che non può essere. E perciò la linea retta

BE non è per diritto alla BC. Dimostreremo similmente, non essere per diritto alla BC alcun altra retta linea, oltre la BD: quindi la retta BC è per diritto alla BD.

Se dunque ad una linea retta, ec. — *C.B D.*

COROLLARIO.

Da questa dimostrazione si rileva che due linee rette non possono avere un comune segmento, senza adattarsi l'una sull'altra [*V. N*].

Poichè se esse avessero il comune segmento CB [*fig.*14.], e poi non coincidessero; ma fossero distinte come le BE, BD; tirata dal punto B la BA comunque, sarebbero uguali a due retti sì gli angoli ABC, ABD, che gli altri ABC, ABE; onde tolto il comune ABC, resterebbe l'angolo maggiore ABD uguale al minore ABE; che è impossibile [*ass.* 9.].

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Se due linee rette scambievolmente si seghino, fanno gli angoli verticali uguali fra loro.

Due linee rette AB, CD [*fig.*15.] scambievolmente si seghino nel punto E: dico l'angolo AEC essere uguale all'angolo DEB, e l'angolo CEB all'altro AED.

Perchè la linea retta AE insistendo sopra la linea retta CD, fa gli angoli CEA, AED; perciò questi sono uguali a due retti [*pr.*13.]. Similmente, perchè la linea retta DE insistendo sopra la AB fa gli angoli AED, DEB, saranno anche questi uguali a due retti: ma si sono dimostrati gli angoli CEA, AED uguali a due retti; sono dunque gli angoli CEA, AED uguali agli angoli AED, DEB: tolgasi di comune l'angolo AED, ed il rimanente angolo CEA sarà uguale al rimanente BED. Nel modo stesso si dimostrerà, che gli angoli CEB, DEA sieno uguali.

Laonde se due linee rette, ec. — *C.B.D.*

COROLLARIO I.

Si rileva da ciò, che segandosi scambievolmente due linee rette fanno gli angoli, che sono nel segamento, uguali a quattro retti [*V. N.*].

COROLLARIO II.

E conseguentemente che tutte le linee rette concorrenti ad un punto vi fanno gli angoli uguali a quattro retti [*V. N.*].

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Di ogni triangolo prolungandosi un lato, l'angolo esteriore è maggiore dell' uno, e l'altro interiore ed opposto.

Sia il triangolo ABC, di cui il lato BC [*fig.* 16.] si prolunghi in D: dico l'angolo esteriore ACD esser maggiore dell' uno e l'altro interiore ed opposto CBA, BAC.

Si divida AC per metà nel punto E [*p.* 10.], e giunta la BE si prolunghi nel punto F, e pongasi la EF uguale alla BE; poi si tiri FC, e prolunghisi la AC in G.

Or poichè la AE è uguale alla EC, la BE alla EF, le due AE, EB sono uguali alle due CE, EF, l'una all'altra, e l'angolo AEB è uguale all'angolo FEC, perchè verticali [*pr.* 15.]; perciò i rimanenti angoli sono ugnali ai rimanenti angoli, l'uno all'altro, quelli cioè che sono sottesi dai lati uguali [*pr.* 4.]. È dunque l'angolo BAE uguale all'angolo ECF. Ma è poi l'angolo ECD maggiore dell'angolo ECF: quindi l'angolo ACD è maggiore dell' angolo BAE. Nel modo stesso, se BC si divida per

a

metà, si dimostrerà che l'angolo BCG, cioè l'altro ACD [*pr.* 15.] è maggiore dell'angolo ABC.

Laonde di ogni triangolo ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Di ogni triangolo due angolí, presi insieme in qualsivoglia modo, sono minori di due retti.

Sia il triangolo ABC [*fig.* 17.]: dico che due angoli di tal triangolo, presi insieme in qualsivoglia mòdo, sono minori di due retti.

Si prolunghi la BC in D. Or poichè del triangolò ABC l' angolo esteriore ACD è maggiore dell' interiore ed opposto ABC [*pr.*16.]; se si aggiunga di comune l' angolo ACB, saranno gli angoli ACB, ACD maggiori degli angoli ABC, BCA: ma gli angoli ACD, ACB sono uguali a due retti [*pr.*13]; perciò gli angoli ABC, BCA sono minori di due retti. Similmente dimostreremo, che gli angoli BAC, ABC sieno minori di due retti; e lo stesso per gli angoli CAB, BCA.

Quindi di ogni triangolo due angoli ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Di ogni triangolo il maggior lato sottende l'angolo maggiore.

Sia il triangolo ABC [*fig.* 18.], che abbia il lato AC maggiore del lato AB: dico ancor l'angolo ABC esser maggiore dell' angolo BCA.

Perchè il lato AC è maggiore del lato AB, pongasi la AD

uguale alla AB, e si giunga BD. E poichè l'angolo esteriore ADB del triangolo BDC è maggiore dell'interiore ed opposto DCB [*pr.* 16.]; ed è l'angolo ADB uguale all'angolo ABD, perchè il lato AB è uguale al lato AD [*pr.* 5.]: dovrà perciò l'angolo ABD esser maggiore dell'angolo ACB; e quindi molto più l'angolo ABC dovrà esser maggiore dell'angolo ACB.

Adunque il maggior lato di ogni triangolo ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Di ogni triangolo il maggior angolo è sotteso dal lato maggiore.

Sia il triangolo ABC [*fig.* 19.], che abbia l'angolo ABC maggior dell'angolo BCA: dico il lato AC esser maggiore del lato AB.

Imperocchè se ciò non è, il lato AC o è uguale al lato AB, o n'è minore. Or non è AC uguale ad AB; poichè ancor l'angolo ABC sarebbe uguale all'altro ACB [*pr.*5.], che non è; e però AC non è uguale ad AB: ma nè anche è minore di AB, perchè sarebbe l'angolo ABC minore dell'angolo ACB [*pr.*18.], che non è; onde AC non è minore di AB: e si è dimostrato che non è uguale; dovrà perciò essere AC maggiore di AB.

Quindi di ogni triangolo il maggior angolo ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Di ogni triangolo due lati presi insieme, in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente.

Sia il triangolo ABC [*fig.*20.]: dico che due lati di un tal

triangolo presi insieme, in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente: cioè i lati BA, AC maggiori del lato BC, i lati AB, BC maggiori del lato AC, ed i lati BC, CA maggiori di AB.

Prolunghisi BA nel punto D, si ponga DA uguale a CA, e giungasi DC.

Perchè dunque DA è uguale ad AC, sarà pure l'angolo ADC uguale all'angolo ACD [*pr.* 5.]: ma l'angolo BCD è maggiore dell' altro ACD; adunque l' angolo BCD è anche maggiore dell' angolo ADC. E perchè il triangolo DCB ha l'angolo DCB maggiore dell' altro BDC, ed il maggior angolo è sotteso dal maggior lato [*pr.* 19.]; perciò DB è maggiore di BC: ma è poi DB uguale alle AB, AC; onde i lati BA, AC sono maggiori di BC. Similmente dimostreremo che i lati AB, BC sono maggiori di CA; e che i lati BC, CA sono maggiori di AB.

Adunque di ogni triangolo due lati ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se dai termini di un lato del triangolo costituiscansi due linee rette di dentro; queste saranno minori de' due lati del triangolo, ma comprenderanno l' angolo maggiore.

Da' termini B, C [*fig.*21.] del lato BC del triangolo ABC, costituiscansi di dentro le due linee rette BD, DC: dico che le BD, DC sieno minori degli altri due lati BA, AC del triangolo; ma che comprendano l' angolo BDC maggiore dell' angolo BAC.

Si prolunghi BD nel punto E: e perchè di ogni triangolo due lati presi insieme in qualsivoglia modo sono maggiori del rimanente [*pr.* 20.]; perciò i due lati AB, AE del triangolo ABE sono maggiori dell' altro BE; si aggiunga di comune EC; e sa-

ranno BA, AC maggiori di BE, EC. Similmente poichè del triangolo CED i due lati CE, ED sono maggiori dell' altro CD; si aggiunga di comune DB; e saranno CE, EB maggiori di CD, DB: ma BA, AC si sono dimostrati maggiori di BE, EC; quindi BA, AC sono molto maggiori di BD, DC.

Inoltre, poichè di ogni triangolo l' angolo esteriore è maggiore dell' interiore ed opposto [*pr.* 16.]; perciò l' angolo esteriore BDC del triangolo CDE è maggiore dell' altro CED. Per la stessa ragione ancor l' angolo esteriore CEB del triangolo ABE è maggiore dell' altro BAC: ma si è dimostrato l' angolo BDC maggiore di DEC; adunque l' angolo BDC sarà molto maggiore dell' angolo BAC.

Quindi se da' termini di un lato del triangolo ec — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Da tre linee rette, che sieno uguali a tre rette linee date, costituire il triangolo; richiedesi che due prese in qualsivoglia modo sieno maggiori della rimanente.

Sieno A, B, C tre linee rette date [*fig.* 22.], due delle quali prese in qualsivoglia modo sieno maggiori della rimanente: cioè che le A, B sieno maggiori della C; le A, C della B; ed ancora le B, C sieno maggiori della A: fa d' uopo costituire il triangolo con tre linee rette uguali alle A, B, C.

Pongasi la linea retta DE, terminata nel punto D, ed interminata verso E, dalla quale si tagli DF uguale alla A, FG uguale alla B, e GH uguale alla C [*pr.*3.]: poi col centro F ed intervallo FD si descriva il cerchio DKL [*post.* 3.]; e similmente col centro G e coll' intervallo GH si descriva il cerchio HKM, e tirinsi le KF, KG: dico che il triangolo KGF sia costituito da tre linee rette uguali alle A, B, C.

Perciocchè essendo il punto F centro del cerchio DKL, la FD è uguale alla FL: ma la FD è eziandio uguale alla A; adunque la KF è uguale alla A. Per la stessa ragione, essendo il punto G centro del cerchio KMH, la GH è uguale alla CK; è poi la GH uguale alla C; adunque la GK è pure uguale alla C: ma la B si è posta uguale alla FG; quindi le tre KF, FG, GK sono uguali alle tre A, B, C.

E perciò dalle tre linee rette KF, FG, GK, che sono uguali alle tre altre date A, B, C, si è costituito il triangolo KFG. — *C.B.F.* [*V.N.*].

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Ad una data linea retta, in un punto dato in essa, costituire un angolo rettilineo uguale ad un angolo rettilineo dato.

Sia data la linea retta AB [*fig.* 23.], ed in essa il punto A, e sia pur dato l'angolo rettilineo DCE: fa d'uopo alla data linea retta AB, ed al punto A in essa costituire un angolo rettilineo uguale al dato DCE.

Prendansi nell'una, e l'altra di esse CD, CE qualsivogliano punti D, E, e si tiri DE: poi da tre linee rette, che sieno uguali alle tre CD, DE, CE si costituisca il triangolo AFG [*pr.*22.], di modo che sia la CD uguale alla AF, la CE alla AG, e la DE alla FG.

Or essendo le due linee rette DC, CE uguali alle due altre FA, AG, l'una all'altra, e la base DE uguale alla base FG; sarà ancora l'angolo DCE uguale all'angolo FAG [*pr.*8.].

Quindi alla data linea retta AB, nel punto A dato in essa, si è costituito l'angolo rettilineo FAG uguale all'altro dato DCE. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, e l'angolo contenuto dai lati di uno di essi sia maggiore dell'angolo contenuto dagli uguali lati dell'altro; sarà la base di quello maggiore della base di questo.

Sieno i due triangoli ABC, DEF [*fig.* 24.], i quali abbiano i due lati AB, AC uguali ai due lati DE, DF, l'uno all'altro, cioè il lato AB uguale al lato DE, ed il lato AC uguale a DF; ma l'angolo BAC sia maggiore dell'angolo EDF: dico ancor la base BC esser maggiore della base EF.

Poichè l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF, si costituisca alla linea retta DE, ed al punto D in essa l'angolo EDG uguale all'angolo BAC [*pr.* 23.], pongasi la DG uguale alla AC, o alla DF, e giungansi le GF, EG. E perchè la AB è uguale alla DE, e la AC alla DG, le due BA, AC sono uguali alle due ED, DG, l'una all'altra; è anche l'angolo BAC uguale all'angolo EDG: adunque la base BC è uguale alla base EG [*pr.* 4.]. Similmente, poichè la DG è uguale alla DF, sarà l'angolo DFG uguale all'angolo DGF [*pr.* 5.]: ma questo è maggiore dell'angolo EGF; adunque altresì l'angolo DFG sarà maggiore dell'angolo EGF: l'angolo dunque EFG è molto maggiore dell'angolo EGF. Or essendo EFG un triangolo, che ha l'angolo EFG maggiore dell'angolo EGF; ed il maggior angolo è sotteso dal lato maggiore [*pr.* 19.]; perciò il lato EG è maggiore dell'altro EF: ma il lato EG è uguale al lato BC; adunque BC è maggiore di EF.

Quindi se due triangoli abbiano due lati ec. — *C.B.D.* [*V.N.*].

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, e la base dell'uno sia maggiore della base dell'altro; avranno ancora l'angolo maggiore dell'angolo, ch'è contenuto dai lati uguali.

Sieno i due triangoli ABC, DEF [*fig.*25.], i quali abbiano i due lati AB, AC uguali ai due lati DE, DF, l'uno all'altro, cioè il lato AB uguale al lato DE, ed il lato AC al lato DF; ma la base BC sia maggiore della base EF: dico che l'angolo BAC sia maggiore dell'angolo EDF.

Perciocchè, se non è maggiore, o è uguale, o minore. Ma l'angolo BAC non è uguale all'angolo EDF; poichè allora sarebbe la base BC uguale alla base EF [*pr.* 4.], che non è: adunque l'angolo BAC non è uguale all'angolo EDF. Nè parimente n'è minore; poichè sarebbe la base BC minore della base EF [*pr.*24.], che non è. Adunque l'angolo BAC non è minore dell'angolo EDF: si è poi dimostrato, che non è uguale; perciò l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF.

Per la qual cosa se due triangoli ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due angoli uguali a due angoli, l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, o quello, ch'è adjacente agli angoli uguali, o l'altro, che sottende uno degli angoli uguali; avranno ancora i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati, l'uno all'altro, ed il terzo angolo uguale al terzo angolo.

Sieno i due triangoli ABC DEF [*fig.* 26.], i quali abbia

no i due angoli ABC, BCA uguali ai due DEF, EFD, l'uno all'altro, cioè l'angolo ABC uguale all'angolo DEF, e l'angolo BCA all'angolo EFD, ed abbiano ancora un lato uguale ad un lato, e primieramente quello che è adjacente agli angoli uguali, cioè il lato BC al lato EF: dico che avranno eziandio i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati, l'uno all'altro, cioè il lato AB al lato DE, ed il lato AC a DF, ed il terzo angolo BAC uguale al terzo angolo EDF.

Imperocchè se il lato BA non è uguale all'altro DE, uno di essi sarà maggiore. Sia maggiore AB: si ponga la GB uguale alla ED, e giungasi la GC. Ed essendo la BG uguale alla DE e la BC alla EF, i due lati GB, BC sono uguali al due DE, EF, l'uno all'altro: è anche l'angolo GBC uguale all'angolo DEF; adunque la base GC è uguale alla base DF, il triangolo GBC è uguale al triangolo DEF, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, l'uno all'altro, quelli che sono sottesi dai lati uguali [*pr.* 4.]. È dunque l'angolo ACB uguale all'angolo DFE: ma l'angolo DFE si è posto uguale all'angolo ACB; quindi l' angolo BCG è uguale all'angolo BCA; il minore al maggiore, che non può essere. Non è dunque la AB disuguale alla DE; e perciò è uguale: la BC poi è uguale alla EF; quindi i due lati AB, BC sono uguali ai due lati DE, EF, l'uno all'altro, è anche l'angolo ABC uguale all'angolo DEF; adunque la base AC è uguale alla base DF, ed il terzo angolo BAC è uguale al terzo EDF [*pr.*4.].

Sieno ora uguali i lati, che sottendono gli angoli uguali, come AB a DE: dico similmente, che i rimanenti lati saranno uguali ai rimanenti lati, cioè AC a DF, e BC ad EF, e che eziandio il terzo angolo BAC sarà uguale al terzo EDF.

Imperocchè se il lato BC non è uguale al lato EF, un di essi sarà maggiore. Sia, s'è possibile, BC il maggiore; si ponga la BH uguale alla EF, e giungasi la HA. E poichè la BH è uguale alla EF, e la AB alla DE; i due lati AB, BH sono uguali ai due lati DE, EF, l'uno all'altro, e comprendono ancora angoli uguali; adunque la base AH è uguale alla base DF, il triangolo ABH è uguale al triangolo DEF, ed i rima-

nenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, l'uno all'altro, a quali stan sottoposti i lati uguali [*pr.*4.]. Quindi l'angolo BHA è uguale all'altro EFD. Ma l'angolo EFD è uguale all'angolo BCA; adunque l'angolo BHA è uguale all'altro BCA: onde l'angolo esteriore BHA del triangolo ACH è uguale all'interiore ed opposto BCA; che non può essere [*pr.* 16.]. Non è dunque BC disuguale ad EF, ma uguale. È poi AB uguale a DE: perciò i due lati AB, BC del triangolo ABC sono uguali ai due lati DE, EF del triangolo DEF, l'uno all'altro; comprendono pure angoli uguali; adunque la base AC è uguale alla base DF, il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF, ed il terzo angolo BAC è uguale al terzo angolo EDF [*pr.* 4.].

Quindi se due triangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Se cadendo una linea retta sopra due altre linee rette; fa gli angoli alterni tra loro uguali: quelle due linee rette saranno parallele.

La linea retta EF [*fig.*27.] cadendo sopra le due linee rette AB, CD, faccia gli angoli alterni AEF, EFD uguali tra loro: dico che la AB sia parallela alla CD.

Imperocchè, se non è parallela, le AB, CD prolungate converranno, o verso le parti B, D, o verso le A, C [*def.*37.]: si prolunghino, e convengano dalle parti B, D nel punto G; sarà dunque GEF un triangolo, e perciò il suo angolo esteriore AEF è maggiore dell'interiore ed opposto EFG [*pr.* 16.]: ma gli è anche uguale, lo che non può essere; quindi le AB, CD prolungate dalle parti B, D non converranno. Similmente dimostreremo che non convengano dalle parti A, C; e quelle rette che non convengono in alcuna delle parti; sono parallele tra loro; onde la AB è parallela alla CD.

E perciò se cadendo una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Se cadendo una linea retta sopra due altre linee rette fa l' angolo esteriore uguale all' interiore ed opposto, e dalle medesime parti; o gl' interiori dalle medesime parti uguali a due retti: quelle due linee rette saranno parallele fra loro.

Nelle due linee rette AB, CD [*fig.* 28.] cadendo la linea retta EF faccia l' angolo esteriore EGB uguale all' interiore ed opposto GHD; o gli angoli interiori, e dalle medesime parti BGH, GHD uguali a due retti: dico che la AB sia parallela alla CD.

Poichè essendo l' angolo EGB uguale all' altro GHD, e l' istesso angolo EGB all' angolo AGH [*pr.* 15.], sarà l' angolo AGH uguale all' angolo GHD, e sono alterni; adunque la AB è parallela alla CD [*pr.* 27.].

Similmente poichè gli angoli BGH, GHD sono uguali a due retti, e gli altri AGH, BGH sono pure uguali a due retti; saranno gli angoli AGH, BGH uguali agli altri BGH, GHD: si tolga di comune l'angolo BGH, sarà il rimanente AGH uguale al rimanente GHD; e sono alterni; adunque AB è parallela a CD [*pr.* 27.]

E perciò se cadendo una linea retta *ec.* — *C.B D.*

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Cadendo una linea retta sopra le linee rette parallele; farà gli angoli alterni uguali fra loro, l'esteriore uguale all' interiore ed opposto, e dalle medesime parti, e gl'interiori, e dalle medesime parti uguali a due retti.

Cada la linea retta EF [*fig.*29.] sopra le linee rette parallele AB, CD: dico che farà gli angoli alterni AGH, GHD uguali tra loro, l'esteriore EGB uguale all'interiore, ed opposto, e dalle medesime parti GHD; e gl' interiori, e dalle medesime parti BGH, GHD uguali a due retti.

Imperocchè se AGH non è uguale a GHD, un di essi è maggiore; sia AGH il maggiore. E poichè l' angolo AGH è maggiore dell' altro GHD, si aggiunga di comune l' angolo BGH, e gli angoli AGH, BGH saranno maggiori degli altri BGH, GHD. Ma gli angoli AGH, BGH sono uguali a due retti; adunque gli altri BGH, GHD sono minori di due retti. Or quelle linee rette, che intersegate da un' altra fanno con questa gli angoli interiori, dalle stesse parti, minori di due retti, prolungate indefinitamente debbono incontrarsi [*post.*5.] perciò le linee rette AB, CD indefinitamente prolungate fra loro concorreranno. Ma non concorrono, ponendosi parallele; non è dunque l' angolo AGH disuguale all' angolo GHD, ond' è necessario che gli sia uguale. È poi l'angolo AGH uguale all'angolo EGB [*pr.*15]; adunque anche EGB sarà uguale a GHD: vi si aggiunga di comune l' angolo BGH; e saranno gli angoli EGB, BGH uguali agli angoli BGH, GHD. Ma gli angoli EGB, BGH sono uguali a due retti [*pr.* 13.]; adunque anche gli angoli BGH, GHD saranno uguali a due retti.

Per la qual cosa se una linea retta *ec.* -- *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

Quelle linee rette, che sono parallele ad una stessa linea retta, sono anche parallele fra loro.

Sia tanto AB [*fig.* 30], che CD parallela alla stessa EF: dico ancora la AB esser parallela alla CD.

Cada sopra esse la linea retta GK. E poichè sopra le linee rette parallele AB, EF cade la linea retta GK, l'angolo AGH è uguale al suo alterno GHF [*pr.*29.]. Similmente poichè nelle linee rette parallele EF, CD cade la linea retta GK, l'angolo esteriore GHF è uguale all'interiore ed opposto dalle medesime parti GKD [*pr.*29.]. Ma si è dimostrato l'angolo AGK uguale all'angolo GHF; quindi sarà pure l'angolo AGK uguale all'angolo GKD; e sono essi alterni; adunque AB è parallela a CD.

E perciò quelle linee rette, ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXXI.

PROBLEMA.

Per un dato punto tirare una linea retta parallela ad una data linea retta.

Sia A il punto dato, e BC [*fig.*31.] la linea retta data: fa d'uopo per lo punto A tirare una linea retta parallela alla BC.

Si prenda nella BC qualsivoglia punto D, e giungasi AD; poi si costituisca alla linea retta DA, e nel punto A in essa l'angolo DAE uguale all'altro ABC, e si prolunghi la EA per diritto in F.

E poichè sopra le due linee rette BC, EF cade la linea

retta AD, e fa gli angoli alterni EAD, ADC fra loro uguali, sarà la EF parallela alla BC [*pr.* 27.].

Quindi per lo dato punto A, si è tirata la linea retta EF parallela alla retta linea data BC. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

In ogni triangolo, prolungandosi un lato, l'angolo esteriore è uguale ai due interiori ed opposti; ed i tre angoli interiori del triangolo sono uguali a due retti.

Sia il triangolo ABC [*fig.*32.*a.*], ed un lato di esso BC si prolunghi in D: dico che l'angolo esteriore ACD sia uguale ai due interiori ed opposti CAB, ABC; e che i tre angoli interiori ABC, BCA, CAB del triangolo sieno uguali a due retti.

Si tiri per lo punto C la CE parallela alla linea retta AB [*pr.*31]. E poichè la AB è parallela alla CE, ed in esse cade la AC; gli angoli alterni BAC, ACE sono uguali fra loro [*pr.* 29.]. Similmente poichè la AB è parallela alla CE, e cade in esse la linea retta BD, l'angolo esteriore ECD è uguale all'interiore ed opposto ABC [*pr.* 29.]: ma si è dimostrato l'angolo ACE uguale all'angolo BAC; perciò tutto l'angolo esteriore ACD è uguale ai due interiori ed opposti BAC, ABC: vi si aggiunga di comune l'angolo BCA; saranno i due angoli ACD, ACB uguali ai tre angoli ABC, BCA, CAB: ma i due angoli ACD, ACB sono uguali a due retti: adunque anche i tre ACB, CBA, BAC sono uguali a due retti.

Quindi in ogni triangolo *ec.* — *C.B.D.*

COROLLARIO I.

Dalla proposizione sopra dimostrata ne segue, che: *Tut-*

ti gli angoli interiori di ogni figura rettilinea, insieme con quattro angoli retti, sono uguali a tanti angoli retti, quanti ne dinota il doppio numero de' lati della figura.

Imperocchè la figura rettilinea ABCDE [*fig*.31.*b*.] si divide in tanti triangoli, quanti lati essa ha, tirando linee rette dal punto F dentro la figura a' vertici de' suoi angoli; che perciò essendo gli angoli di ciascuno di questi triangoli uguali a due retti; gli angoli di tutti i triangoli saranno uguali a quel numero di angoli retti, che vien dinotato dal doppio numero de' triangoli, o sia dal doppio numero de' lati della figura. Ma gli angoli di tutti que' triangoli sono uguali a quelli della figura insieme con gli angoli nel punto F, vertice comune de' triangoli, ed i quali sono presi insieme uguali a quattro retti [*c*. 2. *p*. 15.]. Adunque gli angoli della figura insieme con quattro retti sono uguali a tanti retti, quanti ne dinota il doppio numero de' lati della figura [*V*. *N*.].

Corollario. II.

Inoltre: *Tutti gli angoli esteriori di ogni figura rettilinea sono insieme uguali a quattro retti.*

Imperocchè ciascun angolo interiore ABC [*fig*. 32. *c*.] della figura insieme coll' adjacente esteriore ABD è uguale a due retti [*pr*.13.]; che perciò tutti gli angoli interiori della figura insieme con tutti gli esteriori saranno uguali a tanti due angoli retti quanti sono gli angoli, o i lati della figura. Ma si è dimostrato nel Corollario precedente, che al poc' anzi detto numero di angoli retti sieno uguali gli angoli interiori della figura insieme con quattro retti. Adunque gli angoli interiori della figura insieme cogli esteriori saranno uguali agli angoli interiori della medesima insieme con quattro retti: che perciò tolti di comune gli angoli della figura, resteranno gli esteriori uguali a quattro retti [*V*.*N*.].

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

Quelle linee rette, che congiungono le uguali, e parallele, dalle medesime parti, sono altresì uguali, e parallele.

Sieno uguali, e parallele le AB, CD [*fig*.33.], e le congiungano dalle parti medesime le linee rette AC, BD: dico le AC, BD essere ancor esse uguali, e parallele.

Si unisca BC. E poichè la AB è parallela alla CD, ed in esse cade la BC, gli angoli alterni ABC, BCD sono uguali [*pr*.29.]. Per la qual cosa essendo la AB uguale alla CD, e la BC comune, le due AB, BC sono uguali alle due CD, BC, l'una all'altra: ed è pure l'angolo ABC uguale all'angolo BCD; adunque la base AC è uguale alla base BD, il triangolo ABC è uguale al triangolo BCD, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, l'uno all'altro, quelli che sono sottesi dai lati uguali [*pr*.4.]; onde l'angolo ACB è uguale all'angolo CBD. E poichè nelle due linee rette AC, BD cade la linea retta BC, e fa uguali fra loro gli angoli alterni ACB, CBD; perciò la AC sarà parallela alla BD [*pr*.27.], e si è dimostrata uguale ad essa.

Quindi le linee rette ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

I lati, e gli angoli opposti de' parallelogrammi sono uguali fra loro; ed il diametro gli divide per metà.

N. B. La voce *parallelogrammo* è stata adottata da Euclide per dinotare una figura quadrilatera che ha gli opposti lati paralleli.

Sia il parallelogrammo ACDB [*fig.* 34.], il cui diametro sia CB : dico che i lati opposti di tal parallelogrammo sono uguali fra loro, come pure gli angoli opposti; e che il diametro CB lo divide per metà.

Poichè la AB è parallela alla CD, e cade in esse la linea retta CB, gli angoli alterni ABC, BCD sono tra loro uguali [*pr.*29.]. Similmente poichè la AC è parallela alla BD, e cade in esse la CB, gli angoli alterni ACB, CBD sono tra loro uguali. Quindi sono ABC, BCD due triangoli, i quali hanno due angoli ABC, ACB uguali a due angoli BCD, CBD, l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, ch'è adjacente agli angoli uguali, comune ad amendue CB; adunque avranno i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati, l'uno all'altro, ed il terzo angolo uguale al terzo angolo [*pr.*26.]: perciò il lato AB è uguale al lato CD, il lato AC al lato BD, e l'angolo BAC all'angolo BDC. E poichè l'angolo ABC è uguale all'altro BCD, e l'angolo CBD all'angolo BCA, sarà tutto l'angolo ABD uguale a tutto l'altro ACD. Ma si è pure dimostrato l'angolo BAC uguale all'angolo BDC. Adunque i lati, e gli angoli opposti de' parallelogrammi sono uguali tra loro.

Dico ancora, che il diametro gli divide per metà.

Poichè essendo la AB uguale alla CD, e la BC comune, le due AB, BC sono uguali alle due DC, CB, l'una all'altra, l'angolo ABC è uguale all'angolo BCD; adunque il triangolo ABC sarà uguale al triangolo BCD; e perciò il diametro BC divide per metà il parallelogrammo ACDB. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.

I parallelogrammi costituiti nella medesima base, e fra le medesime parallele, sono uguali fra loro.

Sieno i parallelogrammi ABCD, EBCF [*fig.* 35.] costituiti nella medesima base BC, e tra le medesime parallele AF,

BC : dico il parallelogrammo ABCD esser uguale al parallelogrammo EBCF.

Perciocchè essendo ABCD un parallelogrammo, la AD è uguale alla BC [*pr.* 34.], e per la stessa ragione la EF è uguale alla BC; quindi la AD sarà uguale alla EF : è poi la DE comune ; adunque tutta la AE é uguale a tutta la DF. Ma é anche la AB uguale alla DC: quindi le due EA, AB sono uguali alle due FD, DC, l' una all' altra, e l'angolo esteriore FDC è uguale all' interiore ed opposto EAB ; adunque il triangolo EAB è uguale al triangolo FDC : si tolga di comune il triangolo DGE, sarà il rimanente trapezio ABGD uguale al rimanente EGCF ; e perciò se aggiungasi il triangolo GBC comune, sarà tutto il parallelogrammo ABCD uguale a tutto il parallelogrammo EBCF.

Laonde i parallelogrammi ec. — *C.B.D.*[*V.N.*].

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

I parallelogrammi costituiti nelle uguali basi, e fra le medesime parallele sono uguali fra loro.

Sieno i parallelogrammi ABCD, EFGH [*fig*.36.], costituiti nelle uguali basi BC, FG, e tra le medesime parallele BG, AH: dico il parallelogrammo ABCD essere uguale al parallelogrammo EFGH.

Si congiungano le BE, CH. E poichè la BC è uguale alla FG, e la FG alla EH, sarà la BC uguale alla EH; sono poi parallele, e le BE, CH le congiungono; e quelle, che congiungono le uguali e parallele, dalle medesime parti, sono altresì uguali, e parallele [*pr.*33.]; adunque EB e CH sono anch' esse uguali e parallele. Perciò EBCH è parallelogrammo; ed è inoltre uguale al parallelogrammo ABCD, poichè ha con questo la stessa base BC, ed è costituito tra le medesime parallele BC, AH [*pr.* 35.]. Per la stessa ragione anche il parallelo-

grammo EFGH è uguale allo stesso parallelogrammo EBCH; quindi il parallelogrammo ABCD è uguale al parallelogrammo EFGH.

E perciò i parallelogrammi ec. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

I triangoli costituiti nella medesima base, e fra le medesime parallele sono uguali fra loro.

Sieno i triangoli ABC, DBC [*fig.* 37.] costituiti nella medesima base BC, e tra le medesime parallele AD, BC: dico che il triangolo ABC sia uguale al triangolo DBC.

Si prolunghi la AD dall' una, e l' altra parte in E, F, per B si tiri la BE parallela alla CA, e per C la CF parallela alla BD: perciò è parallelogrammo l'uno e l'altro EBCA, DBCF. È poi il parallelogrammo EBCA uguale all' altro DBCF, essendo nella stessa base BC, e fra le medesime parallele BC, EF [*pr.*35]; ed il triangolo ABC è metà del parallelogrammo EBCA, giacchè questo è diviso per metà dal diametro AB [*pr.* 34.]; e similmente il triangolo DBC è metà del parallelogrammo DBCF, perciocchè anche questo è diviso per metà dal diametro DC: e le metà di grandezze uguali sono tra loro uguali [*ass.*7.]; adunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DBC.

E perciò i triangoli ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA.

I triangoli costituiti nelle uguali basi, e fra le medesime parallele, sono uguali fra loro.

Sieno i triangoli ABC, DEF [*fig*.38] costituiti nelle uguali basi BC, EF, e fra le medesime parallele BF; AD: dico che il triangolo ABC sia uguale al triangolo DEF.

Imperciocchè si prolunghi AC dall' una, e l' altra parte in G, H, indi si tiri per B la BG parallela alla CA, e per F la FH parallela alla DE; adunque l' uno, e l' altro di essi GBCA, DEFH è parallelogrammo; ed è il parallelogrammo GBCA uguale al parallelogrammo DEFH, poichè sono nelle uguali basi BC, EF, e fra le medesime parallele BF; GH [*pr*.36.] : ma il triangolo ABC è metà del parallelogrammo GBCA, giacchè il diametro AB divide questo per metà [*pr*.34.]; ed il triangolo DEF è metà del parallelogrammo DEFH, perciocchè il diametro DF divide questo per metà; e quelle grandezze che sono metà di altre uguali, sono uguali tra loro [*ass*.7.]: è dunque il triangolo ABC uguale a triangolo DEF.

E perciò i triangoli *cc*. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA.

I triangoli uguali costituiti nella medesima base, e dalle parti stesse, sono anche tra le medesime parallele.

Sieno i triangoli uguali ABC, DBC [*fig*.39.] costituiti nella

medesima base BC, e dalle parti stesse: dico essere ancora fra le medesime parallele.

Giungasi AD, dovrà questa esser parallela alla BC. Poichè, se non è parallela, si tiri per A la linea retta AE parallela alla BC [*pr.*31.], e giungasi EC: è dunque il triangolo ABC uguale al triangolo EBC, essendo costituiti nella stessa base BC, e tra le medesime parallele BC, AE [*pr.*37.]: ma il triangolo ABC è uguale all' altro DBC; adunque il triangolo DBC è anche uguale al triangolo EBC; il maggiore al minore, che non può essere. Non è dunque AE parallela a BC. Nella stessa maniera si può dimostrare niun'altra essere parallela oltre la AD, adunque la AD è parallela alla BC.

Per la qual cosa i triangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA.

I triangoli uguali costituiti nelle uguali basi, *poste per diritto*, e dalle parti medesime, sono anche fra le medesime parallele.

Sieno gli uguali triangoli ABC, CDE [*fig.*40.] costituiti nelle uguali basi BC, CE: dico che sieno anche fra le medesime parallele.

Giungasi AD, dovrà questa esser parallela alla BE. Imperocchè se non è parallela, si tiri per A la linea retta AF parallela alla BE [*pr.*31.], e si unisca la FE. È dunque il triangolo ABC uguale al triangolo FCE, essendo costituiti nelle basi uguali, e fra le medesime parallele BE, AF [*pr.*38.]. ma il triangolo ABC è uguale al triangolo DCE; adunque il triangolo FCE sarà uguale al triangolo DCE; il maggiore al minore, che non può essere. Non è dunque la AF parallela alla BE. Nella stessa maniera si può dimostrare, che verun'altra sia parallela, oltre la AD; perciò la AD è parallela alla BE.

Per la qual cosa i triangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XLI.

TEOREMA.

Se il parallelogrammo, ed il triangolo abbiano la medesima base, e sieno fra le medesime parallele; il parallelogrammo sarà doppio del triangolo.

Il parallelogrammo ABCD [*fig*.41.], ed il triangolo EBC abbiano la medesima base BC, e sieno fra le medesime parallele BC, AE: dico che il parallelogrammo ABCD sia doppio del triangolo EBC.

Giungasi AC, e sarà il triangolo ABC uguale al triangolo EBC, essendo essi costituiti nella medesima base BC, e fra le medesime parallele BC, AE [*pr*. 37.]: ma il parallelogrammo ABCD è doppio del triangolo ABC; perciocchè il diametro AC lo divide per metà [*pr*. 34.]; adunque sarà anche doppio del triangolo EBC.

E perciò se il parallelogrammo *cc*. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XLII.

TEOREMA.

Costituire un parallelogrammo, che sia uguale ad un dato triangolo, ed abbia uno de' suoi angoli uguale ad un dato angolo rettilineo.

Sia dato il triangolo ABC [*fig*. 42.], e l'angolo rettilineo D: fa d'uopo costituire un parallelogrammo, che sia uguale al dato triangolo ABC, e che abbia uno de' suoi angoli uguale al dato D.

Si divida la BC per metà in E [*pr*. 10.], e congiunta la AE, si costituisca alla linea retta EC, e nel punto E in co-

sa l' angolo CEF uguale all' altro D [*pr.* 23.], per A si tiri la AG parallela alla EC, e per C la CG parallela alla FE [*pr.*31.]; adunque FECG è parallelogrammo.

Ed essendo la BE uguale alla EC, sarà anche il triangolo ABE uguale all' altro AEC, comechè costituiti nelle uguali basi BE, EC, e fra le medesime parallele BC, AG [*pr.* 38.]. Quindi il triangolo ABC è doppio dell' altro AEC. Ma è poi il parallelogrammo FECG anche doppio del triangolo AEC, essendo entrambi nella stessa base, e fra le medesime parallele [*pr.* 41.]; adunque il parallelogrammo FECG è uguale al triangolo AEC, ed ha l' angolo CEF uguale al dato angolo D.

Per la qual cosa si è costituito il parallelogrammo FECG uguale al dato triangolo ABC, con avere uno de' suoi angoli CEF uguale al dato angolo D. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XLIII

TEOREMA.

In ogni parallelogrammo, i supplementi di quelli parallelogrammi che sono dintorno al diametro, sono uguali fra loro.

Sia il parallelogrammo AECD [*fig.*43.], il cui diametro è AC; e dintorno ad AC vi sieno i parallelogrammi EH, FG, e gli altri, che diconsi supplementi BK, KD: dico che il supplemento BK sia uguale all' altro KD.

Imperciocchè essendo ABCD parallelogrammo, ed AC il suo diametro, il triangolo ABC è uguale al triangolo ADC [*pr.*34.]. E similmente essendo EKHA parallelogrammo, ed AK il suo diametro, il triangolo AEK è uguale al triangolo AHK. Per l'istessa ragione anche il triangolo KGC è uguale all'altro KFC. Essendo dunque il triangolo AEK uguale al triangolo AHK, ed il triangolo KGC all' altro KFC; sarà il triangolo AEK insieme col triangolo KGC uguale al triangolo AHK insieme coll' altro KFC. Ma è poi

to il triangolo ABC uguale a tutto l' altro ADC. Adunque il rimanente supplemento BK è uguale al rimaneute supplemento KD.

Laonde i supplementi de'parallelogrammi *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XLIV.

PROBLEMA.

Ad una data linea retta, in un angolo rettilineo dato, applicare un parallelogrammo che sia uguale ad un dato triangolo.

Sia la linea retta data AB [*fig.* 44.], ed il triangolo dato C, e D il dato angolo rettilineo: fa d'uopo alla data linea retta AB, nell'angolo uguale al dato D, applicare un parallelogrammo uguale al dato triangolo C.

Costituiscasi il parallelogrammo BEFG uguale al triangolo C, nell' angolo EBG uguale all' angolo D [*pr.*42.], e pongasi la BE per diritto alla AB; indi si prolunghi la FG in H, e per A si tiri la AH parallela alla BG, e giungasi la BH. E poichè la linea retta HF cade nelle parallele AH, EF, gli angoli AHF, HFE sono insieme uguali a due retti [*pr.*29.]; e perciò gli altri BHF, HFE sono minori di due retti. Ma se in due linee rette cade una terza, e fa gli angoli interiori, dalle stesse parti, minori di due retti, quelle due linee rette prolungate indefinitamente debbono incontrarsi [*post.* 5.]; adunque le HB, FE prolungate s' incontreranno. Si prolunghino, e s'incontrino in K; e per K si tiri la KL parallela alla EA, o alla FH, e si prolunghino le AH, GB sino ai punti L, M. E poichè HLKF è parallelogrammo, di cui n'è diametro HK, e dintorno ad HK sono i parallelogrammi AG, ME, ed LB, BF sono i supplementi di essi; perciò LB è uguale a BF [*pr.*43.]: ma è poi BF uguale al triangolo C; onde eziandio LB sarà uguale al triangolo C. Or l' angolo GBE è uguale all' al-

tro ABM [*pr.*15.] : ed è esso GBE uguale all' angolo D; sarà quindi anche l' angolo ABM uguale all' angolo D.

Adunque ad una data linea retta AB e nell' angolo dato D si è applicato il parallelogrammo LB uguale al dato triangolo C. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XLV.

PROBLEMA.

Costituire in un angolo rettilineo dato un parallelogrammo uguale ad un dato rettilineo.

Sia ABCD [*fig.*45.] il dato rettilineo, ed E il dato angolo rettilineo: fa d' uopo costituire in un angolo uguale ad E un parallelogrammo uguale al rettilineo ABCD.

Giungasi DB, e costituiscasi il parallelogrammo FH uguale al triangolo ADB, nell' angolo FKH uguale all' angolo E [*pr.*42.]; indi si applichi alla linea retta GH il parallelogrammo GM uguale al triangolo DBC, e nell' angolo GHM uguale all' angolo E [*pr.*44.].

E poichè l' angolo E è uguale a ciascuno degli angoli FKH, GHM, sarà anche l' angolo FKH uguale all' altro GHM; pongasi KHG comune; e saranno gli angoli FKH, KHG uguali agli angoli KHG, GHM: ma gli angoli FKH, FHG sono uguali a due retti [*pr.* 29.]; adunque anche gli altri angoli KHG, GHM saranno uguali a due retti. Or poichè alla linea retta GH, ed al punto H in essa, le due linee rette KH, HM, non poste dalle medesime parti, fanno gli angoli adjacenti uguali a due retti; perciò la KH è per diritto alla HM [*pr.*14.]. E perchè nelle parallele KM, FG cade la linea retta HG, gli angoli alterni MHG, HGF sono uguali [*pr.*29]; pongasi comune l' angolo HGL, e saranno gli angoli MHG, HGL uguali agli altri HGF, HGL: ma gli angoli MHG, HGL sono uguali a due retti; perciò anche gli angoli HGF, HGL saranno uguali a due retti: quindi la FG sarà per diritto alla GL [*pr.*14.].

Or essendo la KF uguale e parallela alla HG, come pure la HG alla ML, sarà la KF uguale e parallela alla ML [*pr*.30.]: ma sono anche parallele le KM, FL; onde LMKF è parallelogrammo. Ed essendo il triangolo ABD uguale al parallelogrammo HF, ed il triangolo DBC al parallelogrammo GM; sarà tutto il rettilineo ABCD uguale a tutto il parallelogrammo KFLM.

Quindi si è costituito il parallelogrammo KFLM uguale al dato rettilineo ABCD nell' angolo FKM uguale al dato angolo rettilineo E. — *C.B.F.*

Corollario

Dalle cose già dette è manifesto in qual modo si possa applicare ad una data linea retta un parallelogrammo uguale ad un dato rettilineo, in un angolo uguale ad un angolo rettilineo dato; poichè è chiaro, che si otterrà ciò che si domanda, incominciando la costruzione dall' applicare alla data linea retta un parallelogrammo uguale al primo triangolo ABD, ed avente un angolo uguale al dato [*V.N.*].

PROPOSIZIONE LXVI.

PROBLEMA.

Descrivere il quadrato da una linea retta data.

Sia data la linea retta AB [*fig.* 46.]; fa d'uopo descrivere da essa il quadrato.

Si tiri alla linea retta AB, dal punto A dato in essa, la perpendicolare AC [*pr*.11.], e si ponga la AD uguale alla AB [*pr*.3.]; poi per lo punto D si tiri la DE parallela alla AB [*pr*. 31.], e per B similmente si tiri la BE parallela alla AC.

È dunque ADEB un parallelogrammo; e perciò la AB è uguale alla DE, e la AD alla BE [*pr*.34.]: ma anche la BA

è uguale alla AD; adunque le quattro linee rette BA, AD, DE, EB sono uguali fra loro; e perciò il parallelogrammo ADEB è equilatero.

Dico che sia anche rettangolo. Poichè nelle parallele AB, DE cade la linea retta AD, gli angoli BAD, ADE sono uguali a due retti [*pr.*29.]: ma l'angolo BAD è retto; adunque anche ADE sarà retto. Or gli angoli opposti de' parallelogrammi sono uguali fra loro [*pr.* 34.]: perciò ciascuno degli angoli ABE, BED, che sono rispettivamente opposti ai precedenti, sarà retto, ed ABED è rettangolo. È stato anche dimostrato equilatero; laonde è quadrato [*def.* 30.]; ed è descritto dalla data linea retta AB. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XLVII.

TEOREMA.

Ne' triangoli rettangoli il quadrato descritto dal lato, che sottende l' angolo retto è uguale ai quadrati, che si descrivono dai lati, che contengono l' angolo retto.

Sia il triangolo rettangolo ABC [*fig.* 47.], che ha retto l' angolo BAC: dico il quadrato descritto dal lato BC essere uguale ai quadrati descritti da' lati BA, AC.

Descrivasi dalla BC il quadrato BDEC [*pr.*46.], e dalle BA, AC i quadrati GB, HC, per A si tiri la AL parallela alla BD, o alla CE, e giungansi le AD, FC. E poichè è retto ciascuno degli angoli BAG, BAC; perciò ad una linea retta AB, nel punto A in essa, le due altre linee rette AC, AG non poste dalle medesime parti fanno gli adjacenti angoli BAC, BAG insieme uguali a due retti; è dunque CA per diritto alla AG [*pr.* 14.]: e per la stessa ragione è pure la AB per diritto alla AH. Or l' angolo DBC è uguale all'angolo FBA, essendo amendue retti; si aggiunga di comune l'angolo ABC, e sarà

tutto l'angolo DBA uguale a tutto l'angolo FBC. Quindi essendo le due AB, BD uguali alle due FB, BC, l'una all'altra, e l'angolo DBA uguale all'angolo FBC; sarà la base AD uguale alla base FC, ed il triangolo ABD uguale al triangolo FBC [*pr.*4.]. Or il parallelogrammo BL è doppio del triangolo ABD, perciocchè hanno la stessa base BD, e sono tra le medesime parallele BD, AL [*pr.*41.]; ed il quadrato GB è doppio del triangolo FBC, perchè anch'essi hanno la stessa base FB, e sono tra le medesime parallele FB, GC: e quelle grandezze, che sono doppie di altre grandezze uguali, sono altresì uguali tra loro [*ass.*6.]; adunque il parallelogrammo BL è uguale al quadrato GB. Nella stessa maniera, unite le AE, BK, si dimostrerà il parallelogrammo CL uguale al quadrato HC: quindi tutto il quadrato DBCE è uguale ai due quadrati GB, HC. Ma il quadrato DBCE è descritto dalla linea retta BC, ed i quadrati GB, HC dalle AB, AC; adunque il quadrato BE descritto dal lato BC è uguale ai quadrati GB, HC, che descrivonsi dai lati BA, AC.

E perciò ne' triangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XLVIII.

TEOREMA.

Se il quadrato descritto da uno de' lati di un triangolo sia uguale ai quadrati descritti dagli altri lati; l'angolo contenuto da questi due lati del triangolo sarà retto.

Nel triangolo ABC [*fig.*48.] sia il quadrato che si descrive dal lato BC uguale ai quadrati descritti dagli altri due lati BA, AC: dico che l'angolo BAC sia retto.

Imperocchè dal punto A si tiri la AD perpendicolare alla AC [*pr.*11.]; pongasi la AD uguale alla BA, e si unisca la DC. E poichè la DA è uguale alla AB, sarà il quadrato

della DA (*) uguale al quadrato della AB; aggiungasi comune il quadrato della CA, e saranno i quadrati delle DA, AC uguali ai quadrati delle AB, AC: ma il quadrato della DC è uguale ai quadrati delle DA, AC, essendo retto l'angolo DAC [*pr.*47.]; ed il quadrato della BC si è posto uguale ai quadrati delle BA, AC; perciò il quadrato della DC è uguale a quello della BC; e quindi il lato DC è uguale al lato CB. Or essendo la AD uguale alla AB, e la AC comune; saranno le due DA, AC uguali alle due BA, AC; è anche la base DC uguale alla base CB; adunque l'angolo DAC è uguale all'angolo BAC [*pr.*8]; che perciò essendo retto l'angolo DAC, anche l'altro BAC sarà retto.

Adunque se il quadrato *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*]

(*) *N. B.* In appresso in vece di dire *il quadrato che si descrive sopra la linea retta AB*, spesso diremo per brevità *il quadrato della AB*.

FINE DEL PRIMO LIBRO.

IL SECONDO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE

DEFINIZIONI.

I. Ogni parallelogrammo rettangolo dicesi esser *contenuto* da quelle due linee rette, che comprendono l'angolo retto.

II. In ogni parallelogrammo, ciascuno de' parallelogrammi, che sono dintorno al diametro di esso, con gli due supplementi, si chiamerà *gnomone*.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se vi sieno due linee rette, una delle quali sia divisa in quante parti si vogliano; il rettangolo contenuto dalle due linee rette è uguale a' rettangoli che contengonsi dalla linea retta non divisa, e da ciascuna parte dell' altra.

Sieno le due linee rette A, BC [*fig.* 49.], e la BC, sia divisa comunque ne' punti D, E: dico il rettango-

lo contenuto dalle linee rette A, BC essere uguale ai rettangoli contenuti da A, BD, da A, DE, e da A, EC, presi insieme.

Dal punto B si tiri la BF perpendicolare alla BC [11. I.], e pongasi BG uguale ad A; poi per G si tiri GH parallela a BC [31. I.], e per D, E, C si tirino pure le DK, EL, CH parallele alla BG. Ciò posto il rettangolo BH è uguale ai rettangoli BK, DL, EH: ed è il rettangolo BH contenuto dalle A, BC; poichè esso è contenuto dalle CB, BG, e BG è uguale ad A: del pari il rettangolo BK è contenuto dalle A, BD; poichè esso è contenuto dalle BD, BG, e BG è uguale ad A: similmente il rettangolo DL è contenuto dalle A, DE; poichè DK ossia BG è uguale ad A; e finalmente il rettangolo EH è contenuto dalle A, EC. Per la qual cosa il rettangolo contenuto dalle A, BC è uguale ai rettangoli contenuti dalle A, BD, dalle A, DE, e dalle A, EC, presi insieme.

E perciò se vi sieno due linee rette, ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; i rettangoli contenuti da tutta la linea, e da ciascuna delle parti, sono insieme uguali al quadrato dell'intera linea.

Sia la linea retta AB [*fig.* 50.] comunque divisa nel punto C: dico che i rettangoli contenuti dalle AB, BC, e dalle BA, AC sieno insieme uguali al quadrato di AB.

Si descriva dalla AB il quadrato ADEB [46. I.], e per C si tiri la CF parallela ad AD, o BE [31. I.].

E poichè il quadrato AE è uguale ai rettangoli AF, CE; ed è AE il quadrato di AB, ed il rettangolo AF è contenuto dalle BA, AC, perchè è contenuto dalle DA, AC, ed è DA uguale ad AB; e similmente il rettangolo CE è contenuto dalle

AB, BC, essendo BE uguale ad AB: perciò il rettangolo di BA, AC (*) insieme coll'altro di AB, BC, è uguale al quadrato di AB.

Laonde se una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una parte di essa, è uguale al rettangolo contenuto dalle due parti, insieme col quadrato della parte predetta.

Sia la linea retta AB [*fig.*51.] comunque divisa in C: dico che il rettangolo di AB, BC sia uguale al rettangolo di AC, CB, insieme col quadrato di BC.

Si descriva dalla BC il quadrato CDEB [46. I.]; si produca ED in F, e per A si tiri AF parallela a CD, o BE; sarà il rettangolo AE uguale ai rettangoli AD, CE: ed è il rettangolo AE contenuto dalle AB, BC, perciocchè è contenuto dalle AB, BE, delle quali BE è uguale a BC; AD è il rettangolo contenuto dalle AC, CB, poichè DC è uguale a CB; e finalmente DB è il quadrato di BC. Adunque il rettangolo di AB, BC è uguale al rettangolo di AC, CB, insieme col quadrato di BC.

Se dunque una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

(*) *N. B.* Per evitare le frequenti ripetizioni della voce contenuto, *il rettangolo contenuto dalle linee rette AB, BC* è qualche volta chiamato semplicemente *il rettangolo di AB, BC.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; il quadrato di tutta la linea è uguale ai quadrati delle parti di essa, insieme col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti.

Sia la linea retta AB [*fig.*52.] comunque divisa in C: dico che il quadrato di AB sia uguale ai quadrati di AC, e di CB, insieme col doppio rettangolo contenuto dalle AC, CB.

Si descriva dalla AB il quadrato ADEB; si giunga BD; per C si tiri CGF parallela ad AD, o BE, ed indi per G la HK parallela ad AB, o DE.

Poichè CF è parallela ad AD, e BD cade sulle medesime; perciò l'angolo esteriore BGC è uguale all' angolo interiore, ed opposto ADB [29. I.] Ma l' angolo ADB è uguale all'angolo ABD, perchè BA è uguale ad AD [5. I.], essendo lati del quadrato: quindi l' angolo CGB è uguale all' angolo GBC; è perciò il lato BC è uguale al lato CG [6. I.]. Ma CB è altresì uguale a GK, e CG a BK [34. I.]; adunque GK è uguale a KB; e perciò il quadrilatero CGKB è equilatero. Dico in oltre che sia anche rettangolo. Imperocchè essendo CG parallela a BK, e cadendo sopra di esse CB, gli angoli KBC, GCB, sono uguali a due retti [29. I.]: ma è retto l' angolo KBC; adunque anche l' altro GCB sarà retto: quindi anche retti saranno gli angoli opposti KGC, GKB [34.I.]; onde CGKB è rettangolo. Ma si è dimostrato equilatero; adunque è quadrato, ed è quello di BC. Per la stessa ragione HF è il quadrato di HG, o di AC. Laonde HF, e CK sono i quadrati di AC, e di BC. E poichè il supplemento AG è uguale al supplemento CE [43. I.], ed AG è il rettangolo contenuto da AC, CB,

essendo GC uguale a CB; perciò EG sarà altresì uguale al rettangolo di AC, CB; quindi i rettangoli AG, GE sono uguali al doppio rettangolo di AC, CB. Sono poi HF, e CK i quadrati di AC, e di CB; adunque i quattro parallelogrammi HF, CK, AG, GE sono uguali ai quadrati di AC, e di CB, ed al doppio rettangolo di AC, CB. Ma i parallelogrammi HF, CK, AG, GE formano tutto il quadrato ADEB, ch'è descritto dalla AB: quindi il quadrato di BA è uguale ai quadrati di AC, e di CB, ed al doppio rettangolo di AC, CB.

E perciò se una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

Corollario

Da ciò che si è dimostrato si rileva chiaramente, *che ne' quadrati, i parallelogrammi dintorno al diametro sieno anche quadrati.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa in parti uguali, ed in parti disuguali; il rettangolo contenuto dalle parti disuguali, insieme col quadrato della linea ch' è tra i punti delle sezioni, è uguale al quadrato della metà della linea.

Sia la linea retta AB [*fig.* 53.] divisa in parti uguali nel punto C, ed in parti disuguali in D: dico il rettangolo di AD, DB, insieme col quadrato di CD, essere uguale al quadrato di CB.

Descrivasi da BC il quadrato CEFB, e giungasi BE; poi per D si tiri la DHG parallela a CE, o BF, e similmente per H si tiri KLM parallela a CB, o EF; finalmente anche per A si tiri AK parallela a CL, o BM.

E poichè il complemento CH è uguale al complemento HF [43. I.], aggiungasi a ciascuno di essi DM, e sarà tutto CM uguale a tutto DF. Ma CM è uguale a CK; poichè AC è uguale a CB [36.I.]; adunque AL sarà uguale a DF: aggiungasi anche a questi di comune CH, e sarà tutto AH uguale ad FD, e DL. Ma AH è il rettangolo contenuto da AD, DB, poichè DH è uguale a DB; ed FD, e DL formano lo gnomone ONX: quindi lo gnomone ONX è uguale al rettangolo di AD, DB. Or anche a questi si aggiunga di comune LG, ch'è uguale al quadrato di CD [c. 4. I.]; e sarà lo gnomone ONX, insieme col quadrato LG uguale al rettangolo di AD, DG, insieme col quadrato di CD. Ma lo gnomone ONX, ed il quadrato LG formano tutto il quadrato CEFB, ch'è il quadrato di CG: perciò il rettangolo di AD, DB, insieme col quadrato di CD, è uguale al quadrato di CB.

Quindi se una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se una linea retta si divida per metà, e ad essa si aggiunga per diritto un'altra linea retta; il rettangolo contenuto da tutta la linea coll'aggiunta, e dall'istessa aggiunta, insieme col quadrato della metà, è uguale al quadrato, che si descrive dalla composta della metà, e dell'aggiunta, come da una linea sola.

Si divida la linea retta AB [*fig.* 54.] per metà nel punto C, e vi si aggiunga per diritto BD: dico il rettangolo di AD, DB, insieme col quadrato di BC, essere uguale al quadrato di CD.

Descrivasi dalla CD il quadrato CEFD, e si giunga DE; si tiri poi per B la BHG parallela a CE, o DF, e parimente per H si tiri KLM parallela ad AD, o EF: finalmente per A si tiri AK parallela a CL, o DM.

E poichè AC è uguale a CB, sarà il rettangolo AL uguale al rettangolo CH [36. I.]. Ma CH è uguale ad HF [43.I.]; adunque AL sarà uguale ad HF. Or si aggiunga a ciascuno di questi CM, e sarà tutto il rettangolo AM uguale allo gnomone NXO. Ma AM è il rettangolo contenuto da AD, DB, poichè DM è uguale a DB; adunque lo gnomone NXO è uguale al rettangolo di AD, DB. Si aggiunga similmente di comune LG, ch'è uguale al quadrato di CB [cor.4. II.], e sarà il rettangolo di AD, DB insieme col quadrato di CB uguale allo gnomone NXO insieme con LG. Ma lo gnomone NXO, ed LG sono tutto il quadrato CEFD, ch'è descritto dalla CD; adunque il rettangolo di AD, DB insieme col quadrato di CB è uguale al quadrato di CD.

E perciò se una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa comunque; i due quadrati, uno descritto dall' intera linea, e l' altro da una parte, sono uguali al doppio rettangolo contenuto da tutta la linea, e dalla detta parte, insieme col quadrato dell' altra parte.

Sia la linea retta AB comunque divisa nel punto C [*fig.*55.]: dico che i quadrati di AB, e di BC, sieno uguali al doppio rettangolo contenuto da AB, BC, insieme col quadrato di AC.

Si descriva dalla AB il quadrato ADEB [46. I.] e costituiscasi la figura.

E poichè il rettangolo AG è uguale al rettangolo GE [43.I], si aggiunga di comune il quadrato CK [*cor.*4. II.], e sarà tutto AK uguale a tutto CE: perciò i rettangoli AK, CE sono il doppio del rettangolo AK. Ma i rettangoli AK, CE

formano lo gnomone NLM, ed il quadrato CK; adunque lo gnomone NLM ed il quadrato CK saranno il doppio del rettangolo AK. Ma è pure il rettangolo di AB, BC, preso due volte, doppio di AK, poichè BK è uguale a BC: adunque lo gnomone NLM, ed il quadrato CK sono uguali al doppio rettangolo di AB, BC. Aggiungasi di comune HF, ch'è uguale al quadrato di AC, e saranno lo gnomone NLM, ed i quadrati CK, ed HF uguali al doppio rettangolo di AB, BC, ed al quadrato di AC. Ma lo gnomone NLM, ed i quadrati CK, HF formano ADEB insieme con CK, cioè i quadrati di AB, e di BC. Adunque i quadrati di AB, e di BC sono uguali al doppio rettangolo di AB, BC insieme col quadrato di AC.

E perciò se una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; il quadruplo rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una delle parti, insieme col quadrato dell' altra parte, è uguale al quadrato che si descrive da tutta la linea e dalla parte predetta, come da una linea sola.

Sia la linea retta AB [*fig.*56.] divisa comunque in C: dico che il quadruplo rettangolo contenuto da AB, BC insieme col quadrato di AC sia uguale al quadrato che si descrive dalle AB e BC, come da una linea sola.

La linea retta AB si prolunghi in D, e si ponga BD uguale a CB; poi si descriva dalla AD il quadrato AEFD, e si costituisca la doppia figura.

E poichè CB è uguale a BD, e la stessa CB è uguale a GK [34. I.], BD a KN, sarà anche GK uguale a KN; e similmente dimostreremo PR uguale ad RQ. Or perchè CB è

uguale a BD, e GK a GN; sarà il rettangolo CK uguale al rettangolo KD, ed il rettangolo GR uguale all'altro RN [36.1.]. Ma CK è uguale ad RN, comecchè complementi del parallelogrammo CO [43. I.]; onde eziandio KD è uguale a GR; e perciò i quattro rettangoli DK, KC, GR, RN sono uguali fra loro; e quiudi sono insieme il quadruplo del rettangolo CK. Similmente, poichè CB è uguale a BD, e BD è uguale a BK [c. 4. II.], o sia a CG, CB a GK, o sia a GP; sarà CG uguale a GP: è pure PR uguale ad RO; sarà perciò il rettangolo AG uguale al rettangolo MP, e'l rettangolo PL all'altro RF. Ma MP è uguale a PL, poichè sono complementi del parallelogrammo ML; quindi anche AG è uguale ad RF. Per la qual cosa i quattro parallelogrammi AG, MP, PL, RF sono tra loro uguali, e perciò tutt' insieme sono il quadruplo di AG. Si è anche dimostrato, che i quattro parallelogrammi CK, KD, GR, RN sono insieme il quadruplo di CK; quindi gli otto parallelogrammi, che formano lo gnomone STY, sono il quadruplo del rettangolo AK. E poichè AK è il rettangolo contenuto da AB, BC, essendo BK uguale a BC; sarà il rettangolo contenuto da AB, BC, presso quattro volte, quadruplo di AK. Ma si è dimostrato lo gnomone STY anche quadruplo di AK; adunque il quadruplo rettangolo di AB, BC è uguale allo gnomone STY: si aggiunga ad essi di comune XH, ch'è uguale al quadrato di AC [c. 4. II.]; sarà il quadruplo rettangolo di AB, BC, insieme col quadrato di AC uguale allo gnomone STY, ed al quadrato XH. Or lo gnomone STY, ed XH formano tutto il quadrato AEFD, che si descrive dalla AD; adunque il quadruplo rettangolo di AB, BC, insieme col quadrato di AC è uguale al quadrato di AD, o sia di AB, e BC, come da una linea sola.

E perciò se una linea retta *cc.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE. IX.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa in parti uguali, ed in parti disuguali; i quadrati delle parti disuguali di tutta la linea, sono il doppio del quadrato della metà, e del quadrato di quella linea, ch'è tra i punti delle sezioni.

Sia la linea retta AB [*fig.* 57.] divisa in parti uguali nel punto C, ed in parti disuguali in D: dico che i quadrati di AD e di DB sieno il doppio de' quadrati di AC e di CD.

Si tiri dal punto C ad AB la perpendicolare CE, la quale si ponga uguale a ciascuna di esse AC, CB, poi giungansi le EA, EB; per D si tiri DF parallela a CE, e similmente per F, FG parallela a CD, e giungasi AF.

E poichè AC è uguale a CE, sarà l'angolo EAC, uguale all'angolo AEC [5. I.]; e perciò essendo retto l'angolo in C, i rimanenti angoli EAC, AEC saranno uguali ad un retto [32.I.]. Ma essi sono anche uguali tra loro; adunque ciascuno degli angoli AEC, EAC è metà di un retto. Della stessa maniera si dimostra, che ciascuno degli angoli CEB, EBC è metà di un retto; quindi tutto l'angolo AEB è retto. Ed essendo l'angolo EGF retto, perchè uguale all'interno ed opposto ECB [29.I.], sarà anche il rimanente angolo EFG metà di un retto; perciò l'angolo GEF è uguale all'altro EFG, e quindi il lato EG è uguale al lato GF [6. I.]. Similmente, essendo l'angolo in B metà di un retto, e l'angolo FDB retto, perchè uguale all'interno ed opposto ECB; sarà il rimanente BFD anche metà di un retto: quindi l'angolo in B è uguale all'angolo DFB; e perciò il lato DF è uguale al lato DB.

Or poichè AC è uguale a CE, sarà il quadrato di AC uguale a quello di CE; laonde i quadrati di AC e di CE sono il doppio del quadrato di AC. Ma ai quadrati di AC e di CE è uguale quello di EA, essendo retto l'angolo ACE [47. I.];

gasi uguale a ciascuna di esse AC, CB, e si giungano le AE, EB; poi per E si tiri la EF parallela alla AD, e per D la DF parallela alla CE. E perchè nelle parallele EC, FD cade la linea retta EF, gli angoli CEF, EFD sono uguali a due retti [29. I.]; e perciò gli angoli FEB, EFD sono minori di due retti. Ma due linee rette prolungate indefinitamente dalla parte ove gli angoli sono minori di due retti debbono incontrarsi [*post*. 5.]; adunque le EB, FD prodotte dalle parti B, D dovranno incontrasi: si prolunghino, e s'incontrino nel punto G, e si giunga AG.

Perchè dunque AC è uguale a CE, l'angolo AEC sarà uguale all'angolo EAC. Ma l'angolo in C è retto; perciò ciascuno de'due altri angoli EAC, AEC è metà di un retto [32.I.]. Similmente si dimostra, che sì l'angolo CEB, che l'altro EBC è metà di un retto; quindi l'angolo AEB è retto. Or essendo EBC metà di un retto, sarà anche metà di un retto l'altro DBG, che gli è verticale [15 I.]. Ma l'angolo BDG è retto, poichè è uguale all'alterno DCE [29. I.]; quindi il rimanente angolo DGB è pure metà di un retto, e perciò uguale a DBG; ond'è che il lato BD è uguale al lato DG. Similmente, poichè l'angolo FGE è metà di un retto, e l'angolo in F è retto, come uguale all'angolo opposto in C, sarà il rimanente angolo FEG anche metà di un retto; quindi uguale ad EGF; e perciò il lato EF è uguale al lato GF.

Or essendo EC uguale a CA, il quadrato di EC è uguale a quello di CA; e perciò i quadrati di EC, e di CA sono il doppio del quadrato di CA. Ma il quadrato di EA è uguale a quadrati di EC, e di CA; adunque il quadrato di EA è doppio di quello di AC. Del pari, poichè GF è uguale ad FE, il quadrato di GF è uguale al quadrato di FE; e perciò i quadrati di GF, e di FE sono il doppio del quadrato di EF. Ma ai quadrati di GF, e di EF è uguale il quadrato di EG; adunque il quadrato di EG è doppio del quadrato di EF: è poi EF uguale a CD [34. I.]; sarà perciò il quadrato di EG doppio del quadrato di CD. Si è anche dimostrato il quadrato di EA doppio del quadrato di AC; quindi i quadrati di AE, e di EG sono il

doppio de' quadrati di AC, e di CD. Or ai quadrati di AE, e di EG è uguale il quadrato di AG [47. I.]; onde sarà il quadrato di AG doppio de' quadrati di AC, e di CD. Ma al quadrato di AG sono uguali i quadrati di AD, e di DG; perciò anche i quadrati di AD, e di DG sono il doppio de' quadrati di AC, e di CD: è poi DG uguale a DB; adunque i quadrati di AD, e di DB sono il doppio de' quadrati di AC, e di CD.

Per la qual cosa se una linea retta *cc.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Dividere una linea retta data in modo, che il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una delle parti, sia uguale al quadrato dell'altra parte.

Sia data la linea retta AB [*fig.* 59.]: fa d' uopo dividerla in modo, che il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una parte di essa, sia uguale al quadrato dell' altra parte.

Si descriva dalla AB il quadrato ACDB [46. I.], dividasi AC per metà in E [10. I.], e si giunga BE; indi si prolunghi CA in F, e si ponga EF uguale a BE; e descritto dalla AF il quadrato FGHA, si prolunghi GH in K: dico che la linea retta AB resti divisa in H in modo, che il rettangolo di AB, BH sia uguale al quadrato di AH.

Perciocchè essendo la linea retta AC divisa per metà in E, e per diritto ad essa aggiunta la AF, il rettangolo delle CF,FA, insieme col quadrato di AE, sarà uguale al quadrato di EF [6.II.]. Ma la EF è uguale alla EB; laonde il rettangolo di CF, FA, insieme col quadrato di AE è uguale al quadrato di EB. Or questo quadrato è uguale ai quadrati di BA, e di AE; poichè è retto l'angolo in A; adunque il rettangolo di CF, FA, insieme col quadrato di AE è uguale ai quadrati di BA, e di AE: si tolga di comune il quadrato di AE, e sarà il rimanente ret-

tangolo di CF, FA uguale al quadrato di AB. È poi il rettangolo di CF, FA lo stesso che FB, poichè AF è uguale ad FK, ed AD è il quadrato di AB; adunque il rett angolo FK è uguale al quadrato AD: tolto di comune AK, sarà il rimanente rettangolo FH uguale al rimanente HD; ed è HD il rettangolo di AB, BH, poichè AB è uguale a BD, ed FH è il quadrato di AH; adunque il rettangolo di AB, BH è uguale al quadrato di AH.

E perciò la data linea retta AB si è divisa in H in modo, che il rettangolo di AB, BH sia uguale al quadrato AH— *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Ne' triangoli ottusangoli, il quadrato del lato, che sottende l' angolo ottuso è maggiore de' quadrati de' lati, che comprendono un tal angolo, per lo doppio rettangolo contenuto da un de' lati dintorno all' angolo ottuso, cioè da quello nel quale prolungato cade la perpendicolare dal vertice dell' angolo opposto, e dalla linea retta che tal perpendicolare taglia sul prolungamento di esso, verso l' angolo ottuso.

Sia il triangolo ottusangolo ACB [*fig.* 60.], che ha ottuso l' angolo BCA, e dal punto A si tiri alla BC prolungata la perpendicolare AD: dico che il quadrato di AB sia maggiore de' quadrati di AC, e di CB, per lo doppio rettangolo contenuto dalle BC, CD.

Imperocchè la linea retta BD essendo divisa comunque nel punto C, il quadrato di BD è uguale a' quadrati di BC, e di CD, ed al doppio rettangolo di BC, CD [4. II.]: aggiunto di comune il quadrato di AD, saranno i quadrati di BD e di

DA uguali ai quadrati di BC, di CD, e di DA, ed al doppio rettangolo di BC, CD. Ma ai quadrati di BD, e di DA è uguale il quadrato di AB, perchè è retto l'angolo in D [47. I.], mentre la AD è perpendicolare alla BD; ed ai quadrati di AD, e di DC è uguale il quadrato di AC; adunque il quadrato di AB è uguale ai quadrati di CA, e di CB, ed al doppio rettangolo di BC, CD.

E perciò ne' triangoli ottusangoli *ec.* C.B.D.]

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Ne' triangoli obbliquangoli, *cioè ottusangoli o acutangoli*, il quadrato del lato che sottende un angolo acuto è minore de' quadrati de' lati che lo comprendono, per lo doppio rettangolo contenuto da uno de' lati dintorno all'angolo acuto, cioè da quello nel quale cade la perpendicolare dal vertice dell' angolo opposto, e dalla linea retta che tal perpendicolare tronca in esso, verso l' angolo acuto.

Sia il triangolo obbliquangolo ACB, [*fig.* 60 e 61.] che ha acuto l' angolo B, e dal punto A si tiri alla BC la perpendicolare AD: dico, che il quadrato di AC sia minore de' quadrati di CB, e di BA, per lo doppio rettangolo di CB, BD.

Imperocchè i quadrati di CB, e di BD essendo uguali al doppio rettangolo di CB, BD ed al quadrato di DC [7. II.]: aggiunto di comune il quadrato di AD, saranno i quadrati CB, di BD, e di DA uguali al doppio rettangolo di CB, BD, ed a' quadrati di AD, e di DC. Ma ai quadrati di BD, e di DA è uguale il quadrato di AB, perchè è retto l' angolo in D [47. I.]; ed ai quadrati di CD, e di DA è uguale il quadrato di

AC; onde i quadrati di CB, e di BA sono uguali al quadrato di AC, ed al doppio rettangolo di CB, BD; e perciò il solo quadrato di AC è minore de' quadrati di CB, e di BA, per lo doppio rettangolo di CB, BD.

Quindi ne' triangoli obbliquangoli *ec.* — *C.B.D.* [*V. N.*]

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

Costituire un quadrato uguale ad un dato rettilineo. [*V. N.*]

Sia dato il rettilineo A [*fig.*62.]; fa d'uopo costituire un quadrato uguale ad esso rettilineo.

Si costituisca il rettangolo BCDE uguale al rettilineo A [45. I.], e se la BE è uguale alla ED, si sarà fatto quello, che si domanda; poichè si sarà già costituito il quadrato BD uguale al rettilineo A. Ma se ciò non ha luogo; si prolunghi una di esse BC, BE, la BE in F, e si ponga la EF uguale alla ED: indi divisa la BF per metà in G, col centro G ed intervallo GB, o GF si descriva il semicerchio BHF; si prolunghi la DE in H, e si congiunga la GH.

Perchè dunque linea retta BF è divisa in parti uguali in G, ed in parti disuguali in E; sarà il rettangolo di BE, EF, insieme col quadrato di EG, uguale al quadrato di GF [5.II.]: ma è poi GF uguale a HG; quindi il rettangolo di BE, EF, insieme col quadrato di GE è uguale al quadrato di GH. Or questo quadrato di GH è uguale ai quadrati di GE, e di EH [47. I.]; adunque il rettangolo di BE, EF, insieme col quadrato di EG, è uguale ai quadrati di HE, e di EG; e perciò tolto di comune il quadrato di EG, sarà il rimanente rettangolo di BE, EF uguale al quadrato di EH. Ma il rettangolo di BE, EF è lo stesso che il parallelogrammo BD, poichè EF è uguale ad ED; adunque il parallelogrammo BD è uguale al quadrato di EH; e perciò

essendo il parallelogrammo CD uguale al rettilineo A, sarà questo rettilineo uguale al quadrato di EH.

Si è dunque costituito un quadrato uguale ad un rettilineo dato, cioè quello che si descrive da EH. *ec.* — *C.B.F.*

FINE DEL SECONDO LIBRO.

IL TERZO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE.

DEFINIZIONI.

I. Cerchi uguali sono quelli, che hanno i diametri, ovvero i raggi loro uguali [*V. N.*].

II. Una linea retta dicesi *toccare* il cerchio, quando lo incontra, e prolungata non lo sega.

III. I cerchi si dicono *toccarsi* fra loro, quando incontrandosi non si segano scambievolmente.

IV. Le linee rette nel cerchio si dicono essere *ugualmente distanti* dal centro, quando le perpendicolari abbassate sopra esse dal centro sono uguali.

V. Dicesi poi essere *più distante* dal centro quella linea retta sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

VI. *Veggasi la def.* XIX. *Lib. I.*

VII. » L'*angolo del segmento* è quello, che si comprende
» dalla linea retta, che è la base del segmento, e dalla circon-
» ferenza di esso [*V. N.*].

VIII. L'*angolo nel segmento* è quello, che si contiene da due linee rette tirate da un punto della circonferenza del segmento ai termini di quella linea retta, che è base del segmento.

IX. Ed un tal angolo è detto *insistere* su quella circonferenza, ch'è compresa tra le linee rette, che contengono l'angolo.

X. Il *settore* del cerchio è la figura contenuta da due raggi,

che fanno un angolo al centro, e dalla circonferenza ch'è fra essi.

XI. *Segmenti simili* di cerchi sono quelli, che contengono angoli uguali, ovvero che hanno uguali gli angoli, che sono in essi.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

Trovare il centro di un dato cerchio.

Sia dato il cerchio ABC [*fig.* 63.]: fa d'uopo trovarne il centro.

Tirisi in esso una linea retta AB, che si divida per metà in D: poi dal punto D si tiri alla AB la perpendicolare DC [11. I.], la quale si prolunghi in E, e si divida la CE per metà in F: dico essere il punto F il centro del cerchio ABC.

Perciocchè se non è F, sia, se è possibile, un altro punto G, e giungansi le GA, GD, GB. E poichè la AD è uguale alla DB, e la DG è comune, saranno le due AD, DG uguali alle due DB, DG, l'una all'altra; è pure la base GA uguale alla base GB, poichè sono raggi [*def.* 15. I.]; quindi l'angolo ADG è uguale all'angolo GDB [8. I.]. Or allorchè una linea retta insistendo sopra un'altra retta linea fa uguali gli angoli adjacenti, l'uno, e l'altro di quelli angoli ugual è retto; adunque l'angolo GDB è retto; ma è anche retto l'angolo FDB; che perciò l'angolo FDB è uguale all'altro GDB: il maggiore al minore; che è impossibile. Non'è dunque G il centro del cerchio ABC. Dimostreremo similmente, che verun altro punto lo sia, fuori che F: quindi F è il centro del cerchio ABC, *ec.* — *C.B.F.* [*V. N*].

COROLLARIO.

É chiaro da ciò, che se in un cerchio una qualunque

linea retta seghi un' altra per metà, e ad angoli retti, il centro di un tal cerchio debba trovarsi in quella segante.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se nella circonferenza del cerchio si prendano due punti ad arbitrio; la linea retta che gli unisce cadrà dentro al cerchio.

Sia il cerchio ABC [*fig.* 64.], e nella circonferenza di esso si prendano due punti ad arbitrio A, B: dico che la linea retta che tirasi dal punto A all' altro B cada dentro al cerchio.

Poichè, s'egli è possibile, cada fuori, come AEB, e preso il centro del cerchio ABC [1. III.], che sia D, si giungano le AD, DB; e poi tirisi la DE, la quale incontri la circonferenza in F. Or essendo la DA uguale alla DB, sarà l' angolo DAE uguale all' angolo DBE: ed essendosi prolungato il lato AE del triangolo DAE, l' angolo DEB sarà maggiore dell' altro DAE [16. I.]: ma l' angolo DAE è uguale all' angolo DBE; onde l' angolo DEB è maggiore dell' angolo DBE. Or il maggior angolo è sotteso dal lato maggiore [18. I.]; quindi DB è maggiore di DE: è poi DB uguale a DF; adunque DF è e maggiore di DE; la minore della maggiore; che è impossibile. Quindi la linea retta tirata dal punto A all' altro B non cade fuori del cerchio. Dimostreremo similmente che nè anche cada nella stessa circonferenza; dovrà dunque necessariamente cadere dentro al cerchio.

E perciò se nella circonferenza ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se una linea retta, tirata nel cerchio per lo centro, seghi per metà un' altra linea retta non tirata per lo centro, la segherà ad angoli retti: e se la sega ad angoli retti, la segherà per metà.

Sia il cerchio ABC [*fig.* 65.], e la linea retta CD tirata per lo centro di esso seghi l' altra linea retta AB non tirata per lo centro per metà nel punto F: dico che la segherà ad angoli retti.

Imperocchè si prenda il centro del cerchio ABC, che sia E, e giungansi le EA, EB. E poichè la AF è uguale alla FB, e la FE è comune; perciò sono le due AF, FE uguali alle due BF, FE, e la base EA è uguale alla base EB; adunque l'angolo AFE sarà uguale all' angolo BFE [8.I.]. Ma allorchè una linea retta insistendo sopra un' altra retta linea fa uguali gli adjacenti angoli, è retto sì l' uno, che l' altro di questi angoli uguali [*def.*10.I.]; adunque è retto sì l' angolo AFE, che l' altro BFE. E perciò la linea retta CD tirata per lo centro segando per metà l'altra AB non tirata per lo centro, la segherà ad angoli retti.

Or la CD seghi la AB ad angoli retti: dico che la segherà per metà, cioè che la AF sia uguale alla FB.

Poichè fatta la stessa costruzione: essendo il raggio EA uguale all' altro EB, l' angolo EAF sarà uguale all' angolo EBF [5. I.]. Ma è pure l' angolo retto AFE uguale al retto BFE; adunque i due triangoli EBF, EAF hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, vale a dire FE, ch' è comune ad entrambi, e che sottende uno degli angoli uguali; quindi avranno anche i rimanenti

lati uguali ai rimanenti lati [26. I.]; e sarà perciò la AF uguale alla FB.

Se dunque in un cerchio ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se s' interseghino nel cerchio due linee rette non tirate per lo centro, non si segheranno, l' una l' altra, per metà.

Sia il cerchio ABCD [*fig.* 66.], e s' interseghino in esso nel punto E due linee rette AC, BD non tirate per lo centro: dico che queste non si segano per metà, l' una l' altra.

Se è possibile, ciascuna di esse divida per metà l' altra in modo, che sia la AE uguale alla EC, la BE alla ED: si trovi il centro del cerchio ABCD [1. III.], che sia F, e giungasi la EF.

E poichè la linea retta FE tirata per lo centro sega per metà l' altra linea retta AC non tirata per lo centro, la segherà ad angoli retti [3. III.]; perciò è retto l' angolo FEA. Similmente poichè la linea retta FE sega per metà l' altra linea retta BD, che non passa per lo centro, la segherà ad angoli retti; quindi è retto l' angolo FEB. Ma si è dimostrato anche retto l' angolo FEA; adunque l' angolo FEA sarà uguale all' altro FEB; il minore al maggiore, che è impossibile. Per la qual cosa le AC, BD non si segheranno, l' una l' altra, per metà.

E quindi se s' interseghino in un cerchio ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se due cerchi s' interseghino, non avranno lo stesso centro.

S' interseghino i due cerchi ABC, CDG [*fig.* 67.] ne' punti B, C: dico ch' essi non avranno lo stesso centro.

Se è possibile, sia E il loro centro comune: si unisca la EC, e si tiri comunque la EFG. Ed essendo E il centro del cerchio ABC, sarà la CE uguale alla EF. Similmente essendo E il centro del cerchio CDG, la CE è uguale alla EG. Ma si è dimostrata la CE uguale alla EF; perciò sarà la EF uguale alla EG: la minore alla maggiore; che non può essere. Adunque il punto E non è il centro de' cerchi ABC, CDG.

E perciò se due cerchi *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due cerchi si tocchino fra loro, al di dentro, non avranno lo stesso centro.

I due cerchi ABC, CDE [*fig.* 68.] si tocchino fra loro, al di dentro in C: dico ch' essi non avranno lo stesso centro.

Se è possibile, sia questo F; si unisca la FC, e tirisi comunque la FEB. E poichè F è il centro del cerchio ABC, la CF è uguale alla FB: inoltre essendo F il centro del cerchio CDE, la CF è uguale alla FE; adunque la FE è uguale alla FB: la minore alla maggiore: che è impossibile. Quindi non è F il centro de' cerchi ABC, CDE.

E perciò se due cerchi *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se nel diametro di un cerchio si prenda un punto qualunque, che non sia il centro del cerchio, e da esso calano nella circonferenza più linee rette; la massima sarà quella nella quale è il centro, e la minima sarà la rimanente parte del diametro: delle altre poi, la più vicina a quella che passa per lo centro sarà sempre maggiore della più lontana; e ciascuna incidente da una parte della minima non potrà averne, che un' altra sola uguale, dall'altra parte della stessa minima.

Sia il cerchio ABCD [*fig.* 69.] il cui diametro AD, ed in essa AD si prenda un punto F, che non sia il centro del cerchio; sia poi E un tal centro, e dal punto F cadano nella circonferenza ABCD alcune linee rette FB, FC, FG: dico che la FA sia la massima, e la FD la minima; e delle altre la FB maggiore della FC, e la FC maggiore della FG.

Imperocchè si uniscano le BE, CE, GE. E poichè due lati di ogni triangolo sono maggiori del terzo; perciò saranno le BE, EF maggiori della BF. Ma è poi la AE uguale alla EB; quindi le BE, EF sono uguali alla AF; adunque la AF è maggiore della BF. Inoltre poichè la BE è uguale alla EC, e la FE è comune; le due BE, EF sono uguali alle due CE, EF; ma l'angolo BEF è maggiore dell' angolo CEF; quindi la base BF è maggiore della base FC [24. I.]: e per la stessa ragione anche la CF è maggiore della GF. Or poichè le GF, FE sono maggiori della GE, e la GE è uguale alla ED; perciò saranno le GF, FE maggiori della ED: tolta di comune la EF, sarà la rimanente GF maggiore della rimanente FD. Quindi FA è la massima, ed FD la minima; e la BF è maggiore della FC, la FC maggiore della FG.

Dico inoltre, che ciascuna delle incidenti dal punto F nella circonferenza ABCD, da una parte della minima FD può averne solamente un' altra uguale, dall' altra parte della stessa minima.

Si costituisca alla linea retta EF, e nel punto E dato in essa l'angolo FEH uguale all'angolo GEF [23.I.], e giungasi la FH. E poichè la GE è uguale alla EH, e la EF è comune; le due GE, EF sono uguali alle due HE, EF, e l'angolo GEF è uguale all'angolo HEF; adunque la base FG è uguale alla base FH [4.I.]. Or dico, che dal punto F non cade nella circonferenza altra linea retta uguale alla FG. Poichè se può succedere, vi cada la FK: ed essendo la FK uguale alla FG, e la FG uguale alla FH, sarà la FK uguale alla FH; vale a dire la più vicina a quella che passa per lo centro sarebbe uguale all' altra che n'è più lontana; che non può essere.

Laonde se nel diametro di un cerchio *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se fuori del cerchio si prenda un punto, e da questo al cerchio si tirino più linee rette, delle quali una passi per lo centro, e le altre cadano comunque; di quelle che cadono nella circonferenza concava, la massima è quella che passa per lo centro; e delle altre la più vicina a quella che passa per lo centro, è sempre maggiore della più lontana. Di quelle poi che cadono nella circonferenza convessa, la minima è quella che prolungata passerebbe per lo centro; e delle altre la più vicina alla minima è sempre minore della più lontana. Finalmente ciascuna incidente da una parte della minima non potrà averne, che un'altra sola uguale dall' altra parte della stessa minima.

Sia il cerchio ABC [*fig.* 70.], e fuori di esso si prenda

un qualunque punto D, dal quale si tirino ad un tal cerchio le linee rette DA, DE, DF, DC, e passi la DA per lo centro: dico, che di quelle che cadono nella circonferenza concava AEFC, la massima sia la DA, che passa per lo centro; e che la più vicina a questa DA sia sempre maggiore della più lontana, cioè la DE maggiore della DF, e la DF maggiore della DC. Delle altre poi che cadono nella circonferenza convessa HLKG, dico che la minima sia la DG, la quale prolungata passerebbe per lo centro; e che ogni altra ch'è più vicina alla minima DG sia sempre minore della più lontana, cioè la DK minore della DL, e la DL minore della DG.

Imperocchè si prenda il centro del cerchio ABC, che sia M, e giungansi le ME, MF, MC, MH, ML, MK: e perchè la AM è uguale alla ME, aggiunta a ciascuna di esse la MD, sarà la AD uguale alle EM, MD; ma le EM, MD sono maggiori della ED; adunque anche la AD è maggiore della ED. Di più, poichè la ME è uguale alla MF, aggiunta di comune la MD, saranno le EM, MD uguali alle MF, MD; è poi l'angolo EMD maggiore dell'angolo FMD; adunque la base ED sarà maggiore della base FD [24. I.]. Dimostreremo similmente, che ancora la FD sia maggiore della CD; quindi la DA è la massima, ed è poi la DE maggiore della DF, e la FD della DC. Oltre a ciò, essendo le MK, KD maggiori della MD, e la MG è uguale alla MK; sarà la rimanente KD maggiore della rimanente GD; e perciò GD è la minima. Or perchè dagli estremi del lato MD del triangolo MLD si sono condotte ad un punto di dentro le due linee rette MK, KD, queste saranno minori delle ML, LD [21. I.]: ma la MK è uguale alla ML; adunque la rimanente DK è minore della rimanente DL. Nel modo stesso si dimostrerà, che la EL sia minore della DH; adunque DG è la minima; ed è poi la DK minore della DL, e la DL minore della DH.

Dico inoltre, che ciascuna delle incidenti nella circonferenza, da una parte della minima, non potrà averne che un' altra sola uguale dall' altra parte della stessa minima.

Si costituisca alla linea retta MD, nel punto M dato in es-

sa, l'angolo DMB uguale all'angolo DMK, e giungasi la DB. E poichè la MK è uguale alla MB, e la MD è comune, le due KM, MD sono uguali alle due BM, MD, l'una all'altra, e l'angolo KMD è uguale all'angolo BMD; adunque la base DK è uguale alla base DB [4. I.] Or dico, che dal punto D non possa cadere nel cerchio altra linea retta uguale alla DK. Poichè se può essere, cada la DN: e perchè la DK è uguale sì alla DN, che alla DB, sarà la DB uguale alla DN, vale a dire la più vicina alla minima sarebbe uguale alla più lontana; che si è dimostrato impossibile.

Se dunque fuori del cerchio ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se dentro al cerchio si prenda un punto, e da questo cadano nella circonferenza più di due linee rette uguali; il punto preso sarà centro del cerchio.

Sia il cerchio ABC [*fig.* 71.], e dentro di esso si prenda il punto D, dal quale cadano nella circonferenza più di due linee rette uguali, vale a dire le DA, DB, DC: dico che il punto D sia il centro del cerchio ABC.

Poichè s'è possibile, questo centro non sia D, ma E, ed unita la DE si prolunghi fino ai punti F, G; sarà FG un diametro. Ed essendosi in tal diametro preso un punto D, che non è il centro del cerchio; sarà DG la massima, e la DC maggiore della DB, la DB della DA [7. III.]: ma queste si pongono uguali, che è impossibile; quindi non può essere E il centro del cerchio ABC. Dimostreremo similmente, che non possa essere il centro alcun altro punto diverso da D. Adunque D è il centro del cerchio ABC.

E perciò se dentro al cerchio ec. — *C.B.D.* [*V. N.*]

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Una circonfereuza di cerchio non interscga un' altra circonferenza in più di due punti.

Se può succedere la circonferenza ABC [*fig.* 72.] seghi l'altra DEF in più di due punti, vale a dire in B, G, F; e preso il centro K del cerchio ABC, giungansi le KB, KG, KF.

Or perchè si è preso dentro al cerchio DEF un punto K, e da esso cadono nella circonferenza DEF più di due linee rette uguali KB, KG, KF; il punto K sarà centro del cerchio DEF [9. III.]; ma K è anche centro del cerchio ABC; quindi due cerchi che s' intersegano avrebbero il centro stesso; lo che non può essere [5. III].

E perciò un cerchio ec. — *C.B.D.* [*V. N.*]

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Se due cerchi si tocchino di dentro, la linea retta che unisce i loro centri prolungata passerà per lo contatto.

I due cerchi ABC, ADE [*fig.* 73.] si tocchino di dentro in A, e prendasi il centro del cerchio ABC, che sia F, e del cerchio ADE il centro G: dico che la linea retta tirata dal punto F all' altro G, se si prolunghi, passerà per A.

Poichè, se può succedere, cada come la FGDH; e giungansi le AF, AG. E perchè le AG, GF sono maggiori della AF [20. I.], o sia della FH; togliendone di comune la

FG; sarà la rimanente AG maggiore della rimanente GH. Ma la AG è uguale alla GD; adunque la GD è maggiore della GH; la minore della maggiore; che è impossibile. Quindi la linea retta tirata dal punto F all' altro G prolungata non cadrà fuori del contatto A; e perciò necessariamente vi dovrà passare.

Se dunque due cerchi ec. — *C B.D.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se due cerchi si tocchino di fuori, la linea retta che unisce i loro centri passerà per lo contatto.

I due cerchi ABC, ADE [*fig.* 74.] si tocchino di fuori in A, e si prenda il centro del cerchio ABC, che sia F, come pure il centro G dell' altro cerchio ADE: dico che la linea retta che unisce il punto F coll' altro G debba passare per lo contatto A.

Se può succedere, cada come la FCDG, e giungansi le FA, AG. Or essendo F il centro del cerchio ABC, sarà la AF uguale alla FC. Per la stessa ragione, poichè G è centro del cerchio ADE, sarà la AG uguale alla GD. Ma si è dimostrata la AF uguale alla FC; adunque le FA, AG sono uguali alle FC, DG; e quindi tutta da FG è maggiore delle FA, AG: ma n' è minore; che è impossibile. Laonde la linea retta che unisce i punti F e G dovrà necessariamente passare per lo contatto A.

Se dunque due cerchi *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Un cerchio non tocca un altro cerchio in più di un punto, o che lo tocchi di dentro, o di fuori.

Se può succedere, il cerchio ABDC [*fig*.75.*n*.1.] tocchi l' altro cerchio EBFD primieramente di dentro in più di un punto, cioè in B, E, D: si prenda il centro G del cerchio ABDC, e 'l centro H dell' altro cerchio EBFD; dovrà la linea retta che si tira dal punto G all' altro H, passare per gli punti B, D [11.III.]: cada come la BGHD. E poichè G è centro del cerchio ABDC, sarà la BG uguale alla GD; quindi la BG è maggiore della HD; e perciò la BH è molto maggiore della HD. Di nuovo, poichè H è centro del cerchio EBFD, la BH è uguale alla HD: ma la BH si è poc' anzi dimostrata molto maggiore della HD; che è impossibile. Adunque un cerchio non tocca di dentro un altro cerchio in più di un punto.

Dico che nè ciò possa avvenire toccandolo di fuori. Poichè, se è possibile, il cerchio AKC [*fig*.75.*n*.2.] tocchi il cerchio ABDC, di fuori, in più di un punto, cioè in A, C, e giungasi la AC. Perchè dunque si sono presi nella circonferenza dell' uno, e l' altro cerchio ABC, AKC due punti qualunque A, C; la linea retta che gli unisce cadrà dentro all' uno, e l' altro [2. III.]: ma cade dentro al cerchio ABDC, e fuori l' altro cerchio ACK; che è assurdo. Adunque un cerchio non tocca di fuori un altro cerchio in più di un punto. Si è anche dimostrato, che ciò non possa avvenire toccandolo di dentro.

Laonde un cerchio non tocca *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Nel cerchio le linee rette uguali sono ugualmente distanti dal centro; e quelle linee rette che sono ugualmente distanti dal centro sono fra loro uguali.

Sia il cerchio ABDC [*fig.* 76.], ed in esso le linee rette uguali AB, CD: dico che queste sieno ugualmente distanti dal centro.

Prendasi il centro del cerchio ABDC, che sia E, da esso si tirino le EF, EG perpendicolari alle AB, CD, e giungansi le AE, EC. E poichè la linea retta EF tirata per lo centro sega ad angoli retti l'altro AB non tirata per lo centro, la segherà altresì per metà [3. III.]; onde la AB è doppia della AF; e per la stessa ragione la CD è doppia della CG: ma la AB è uguale alla CD; adunque la AF è uguale alla CG. Or essendo la AE uguale alla EC, sarà il quadrato di AE uguale a quello di EC: ma al quadrato di AE sono uguali i quadrati di AF, e di FE; perchè è retto l'angolo in F [47.I.], ed al quadrato di EC sono parimente uguali i quadrati di EG e di GC, per esser retto l'angolo in G; perciò i quadrati di AF e di FE sono uguali agli altri di CG e di GE: è poi il quadrato di AF uguale a quello di CG; perchè la AF è uguale alla CG; laonde il rimanente quadrato di EF è uguale al rimanente quadrato di EG; e quindi la FE è uguale alla EG. Or le linee rette tirate nel cerchio diconsi essere ugualmente distanti dal centro, quando le perpendicolari tirate dal centro sopra di esse sono uguali [*def.*4. III.]; adunque le AB, CD sono ugualmente distanti dal centro.

Sieno ora le AB, CD ugualmente distanti dal centro, cioè sia la FE uguale alla EG: dico che la AB sia uguale alla CD.

Imperocchè, fatta la stessa costruzione, dimostreremo simil-

mente, che la AB sia doppia della AF, e la CD della CG. E poichè la AE è uguale alla EC, anche il quadrato di AE è uguale a quello di EC: ma al quadrato di AE sono uguali i quadrati di EF e di FA, ed al quadrato di EC sono uguali i quadrati di EG e di GC; adunque i quadrati di EF e di FA sono uguali a quadrati di EG, e di GC; e perciò, essendo il quadrato di EF uguale a quello di EG, perchè EF è uguale ad EG; sarà altresì il rimanente quadrato di AF uguale al rimanente quadrato di CG, e quindi la linea retta AF è uguale all' altra CG. Ma la AB è doppia della AF, e la CD della CG; perciò anche la AB è uguale alla CD.

Adunque nel cerchio *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Il diametro è la massima di tutte le linee rette che si tirano nel cerchio; delle altre sempre la più vicina al centro è maggiore della più lontana; e quella ch' è maggiore sarà più vicina al centro, che la minore.

Sia il cerchio ABCD [*fig.* 77.], il cui diametro AD, ed il centro E, e più vicina al centro sia la BC, più lontana la FG: dico che la AD sia la massima, e la BC sia maggiore della FG.

Si tirino dal centro le EH, EK perpendicolari alle BC, FG, e giungansi le EB, EC, EF. E poichè la AE è uguale alla EB, e la ED alla EC, sarà la AD uguale alle BE, EC. Ma le BE, EC sono maggiori della BC [20. I.]; quindi anche la AD sarà maggiore della BC.

Ed essendo la BC più vicina al centro, da cui è più lontano la FG, sarà la EK maggiore della EH [*def.* 5. III.]: è poi, come si è dimostrato, la BC doppia della BH, e la FG

doppia della FK; ed i quadrati di EH, HB sono uguali ai quadrati di EK, KF, de' quali il quadrato di EH è minore di quello di EK; quindi il rimanente quadrato di BH sarà maggiore del rimanente quadrato di FK; perciò la retta BH sarà maggiore della FK, e l'intera BC dell'intera FG.

Sia ora la BC maggiore della FG: dico che sarà la BC più vicina al centro, che non è la FG, o sia che la EH è minore della EK.

Poichè la BC è maggiore della FG, sarà anche la BH maggiore della FK. Ma i quadrati di BH, e di HE sono uguali ai quadrati di FK, e di KE, e di essi il quadrato di BH é maggiore di quello di FK, perchè BH è maggiore di FK; quindi il rimanente quadrato di EH sarà minore del rimanente quadrato di EK; e perciò la retta EH è minore della EK.

Laonde il diametro è la massima *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*].

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

La linea retta tirata perpendicolare al diametro di un cerchio, nell'estremità di esso, cade fuori del cerchio; e dalla stessa estremità non si può tirare un'altra linea retta tra la già tirata e la circonferenza, che non seghi il cerchio; o ch'è lo stesso: alcuna linea retta, per quanto grande sia l'angolo acuto ch'essa faccia col diametro nell'estremità sua, o per quanto piccolo sia quello ch'essa faccia colla linea retta perpendicolare al diametro, potrà non segare il cerchio.

Sia il cerchio ABC [*fig.* 78.] intorno al centro D, ed al diametro AB: dico che la linea retta tirata dal punto A perpendicolare alla AB cade fuori del cerchio.

Poichè, se è possibile, cada dentro, come la AC, e giungasi la DC. Ed essendo la DA uguale alla DC, sarà

l'angolo DAC uguale all' altro ACD: ed è retto l'angolo DAC, quindi anche l'altro ACD sarà retto: onde i due angoli DAC, ACD sono uguali a due retti; che è impossibile [32.I.]. Adunque la linea retta tirata perpeudicolare alla BA dal punto A non cadrà dentro al cerchio. Dimostreremo similmente, che nè anche cada nella circonferenza; e però è necessario che cada fuori, come la AE.

Dico, che tra la linea retta AE e la circonferenza non si può tirare, dallo stesso punto A, un' altra linea retta che non seghi il cerchio. Poichè se può essere, se ne tiri un' altra, come la FA, e dal punto D tirisi ad essa la perpendicolare DG che incontri la circonferenza in H. Ed essendo retto l'angolo AGD, l'altro DAG sarà minore del retto; e perciò la AD maggiore della DG [19.I.]: ma la AD è uguale alla DH; adunque la DH è maggiore della DG; la minore della maggiore, che è impossibile. Perciò dallo stesso punto A non può condursi altra linea retta tra la AE e la circonferenza, e che non seghi il cerchio; o ch' è lo stesso: alcuna linea retta, per quanto sia grande l'angolo acuto ch' essa comprenda col diametro nel punto A, o per quanto piccolo sia quello ch' essa faccia colla AE, potrà passare tra questa AE e la circonferenza, e non segare il cerchio. — *C.B.D.* [*V.N.*].

Corollario

È manifesto da ciò, che la linea retta, che si tira perpendicolare al diametro di un cerchio dall' estremità sua, tocca il cerchio: e che la linea retta tocca il cerchio solamente in un punto; poichè quella, che lo incontra in due punti cade dentro di esso, come si è dimostrato [2. III.]. Ed inoltre, che una sola linea retta possa toccare il cerchio in un punto stesso.

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA.

Da un punto dato nella circonferenza di un dato cerchio, o fuori di esso, tirare una linea retta che tocchi il cerchio.

Sia dato il cerchio BCD [*fig.* 79.], e primieramente nella sua circonferenza il punto D; si vuol tirare da un tal punto una linea retta che tocchi il cerchio.

Si trovi il centro E del cerchio, e giungasi il raggio ED, al quale si tiri dal suo estremo D la perpendicolare DF; sarà questa la tangente cercata [*cor.* 16. III.].

Che se il punto dato sia fuori del cerchio BCD, come il punto A: si prenda similmente il centro E del cerchio, e giungasi la AE; poi col centro E ed intervallo EA si descriva il cerchio AFG; indi dal punto D tirisi la DF perpendicolare alla EA, e si giungano le EBF ed AB: dico che dal punto A siasi tirata la AB che tocca il cerchio BCD.

Poichè E è centro de' cerchi BCD, AFG, sarà la EA uguale alla EF, e la ED alla EB. Quindi le due AE, EB sono uguali alle due FE, ED; contengono di più un angolo comune, ch' è quello in E; adunque la base DF è uguale alla base AB, il triangolo DEF è uguale al triangolo EBA, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli; perciò l'angolo EBA è uguale all' angolo EDF: ma l' angolo EDF è retto; onde altresì retto è l'altro EBA. Or EB è un raggio, e quella linea retta che tirasi perpendicolare al diametro del cerchio dall' estremità sua, tocca il cerchio [*cor.* 16. III.]; adunque la AB tocca il cerchio BCD.

E perciò da un punto dato nella circonferenza del cerchio BCD, o fuori di esso, si è tirata la tangente a tal cerchio. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se una linea retta tocca il cerchio, e dal centro si tiri al contatto un' altra linea retta; questa sarà perpendicolare alla tangente.

La linea retta DE [*fig.* 80.] tocchi il cerchio ABC nel punto C, e prendasi il centro F di questo cerchio, dal quale si tiri a punto C la FC: dico che la FC sia perpendicolare alla DE.

Poichè, se non è così, dal punto F si tiri la FG perpendicolare alla DE. Ed essendo retto l' angolo FGC, sarà acuto l'altro GCF; e perciò l' angolo CGF è maggiore dell'altro FCG. Ma il maggior angolo di ogni triangolo è sotteso dal lato maggiore [19. I.]; quindi la FC è maggiore della FG: ed è poi la FC uguale alla FB; adunque la FB è maggiore della FG; la minore della maggiore, che è impossibile. Perciò la FG non è perpendicolare alla DE. Dimostreremo similmente, che verun' altra lo sia, oltre la FC: adunque la FC è perpendicolare alla DE.

Laonde se una linea retta *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se una linea retta tocca il cerchio, e dal contatto si tiri un' altra linea retta perpendicolare alla tangente; in questa sarà il centro del cerchio.

La linea retta DE [*fig.* 81.] tocchi in D il cerchio ABC,

e dal punto C si tiri alla DE la perpendicolare CA: dico che il centro di quel cerchio sia in questa CA.

Non sia così; ma, se può succedere, sia F un tal centro, e giungasi la CF. E poichè la linea retta DE tocca il cerchio ABC, e dal contatto al centro si è tirata la FC, sarà la FC perpendicolare alla DE [18. III.]: quindi l'angolo FCE è retto. Ma è anche retto l'altro ACE; perciò l'angolo FCE è uguale all'altro ACE: il minore al maggiore; che è impossibile. Non è dunque F il centro del cerchio ABC. Dimostreremo similmente, che non lo sia verun altro punto, che non istia nella AC.

Perciò se una linea retta *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

L'angolo al centro del cerchio è doppio di quello ch'è alla circonferenza, quando hanno per base lo stesso arco.

Sia il cerchio ABC [*fig.* 82. *n.* 1, *e* 2.] al cui centro sia l'angolo BEC, e l'altro BAC alla circonferenza, e questi abbiano per base lo stesso arco BC: dico che l'angolo BEC sia doppio dell'altro BAC.

In primo luogo il centro E [*fig.*82.*n.*1.] del cerchio sia dentro l'angolo BAC, e giungasi la AE, la quale si prolunghi in F. Ed essendo la EA uguale alla EB, sarà l'angolo EAB uguale all'angolo EBA; e perciò gli angoli EAB, EBA sono il doppio dell'angolo EAB: ma l'angolo BEF è uguale agli angoli EAB, EBA [32. I.]; adunque l'angolo BEF è doppio dell'angolo EAB. Per la stessa ragione anche l'angolo FEC è doppio dell'altro EAC; quindi tutto l'angolo BEC sarà doppio di tutto l'altro BAC.

Che se il centro E [*fig.*82.*n.*2.] sia fuori dell'angolo BEC:

si unisca pure la DE, e si prolunghi in G. Dimostreremo similmente esser l'angolo GEC doppio dell' altro EDC; de' quali GEB è doppio di EDB; adunque il rimanente BEC sarà doppio del rimanente BDC.

E perciò nel cerchio *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Gli angoli che sono nello stesso segmento di cerchio sono fra loro uguali.

Sia il cerchio ABCDE [*fig.* 83. *n.* 1. *e* 2.], e nello stesso segmento BAED sieno gli angoli BAD, BED: dico esser questi tra loro uguali.

Si prenda il centro del cerchio ABCDE, che sia F; e se il segmento BAED [*fig.*83.*n.*1.] è maggiore del semicerchio, giungansi le BF, FD. Or essendo l'angolo BFD al centro, e l' altro BAD alla circonferenza, ed avendo essi per base lo stesso arco BCD; sarà l'angolo BFD doppio dell'angolo BAD [20. III.]. Per la stessa ragione l' angolo BFD è doppio dell' angolo BED; quindi l' angolo BAD sarà uguale all' altro BED.

Che se poi il segmento BAED [*fig.*83 *n.*2.] nel quale sono gli angoli BAD, BED, non è maggiore del semicerchio, si tiri la AF al centro F, e prolungatala in C, giungasi la EC; sarà il segmento BAEC maggiore del semicerchio, e perciò saranno uguali gli angoli BAC, BEC, che sono in esso. Per la stessa ragione sono ancora uguali gli angoli CAD, CED; che sono nel segmento DABC maggiore del semicerchio; onde tutto l' angolo BAD è uguale a tutto l'altro BED.

Quindi gli angoli — *ec.* *C.B.D.* [*V.N.*]

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Gli angoli opposti de' quadrilateri che descrivonsi ne' cerchi, sono uguali a due retti.

Sia il cerchio ABCD [*fig.* 84.], ed in esso il quadrilatero ABCD: dico che gli angoli opposti di tal quadrilatero sieno uguali a due retti.

Giungansi le AC, BD. E poichè l'angolo CAB è uguale all'angolo BDC, essendo essi nello stesso segmento BADC [21. III.]; e l'angolo ACB è uguale all'altro ADB, per essere nel medesimo segmento ADCB; perciò tutto l'angolo ADC è uguale agli angoli BAC, ACB: aggiunto di comune l'angolo ABC, saranno gli angoli ABC, BAC, ACB uguali agli angoli ABC, ADC. Ma gli angoli ABC, BAC, ACB sono uguali a due retti [32. I.]; perciò anche gli angoli ABC, ADC saranno uguali a due retti. Dimostreremo similmente, che sieno uguali a due retti gli angoli BAD, DCB.

Adunque gli angoli opposti ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Nella medesima linea retta, e dalla medesima parte di essa, non si costituiranno due segmenti di cerchio simili, e che non coincidano.

Se può avvenire, nella medesima linea retta AB [*fig.* 85.] si costituiscano, dalla medesima parte, i due segmenti di cerchio ACB, ADB che sieno simili, e non coincidano. E poichè la circonferenza ACB incontra l'altra ADB ne' due punti A, B, non po-

trà perciò l' una incontrar l' altra in un altro punto [10. III.]; che perciò dovrà l' uno di essi segmenti comprendere l' altro: sia ACB compreso nell' altro ADB, si tiri la linea retta ACD e giungansi le CB, BD. E poichè il segmento ACB è simile all' altro ADB, ed i segmenti simili di cerchio sono quelli che contengono angoli uguali [*def*.11.III.]; sarà l' angolo ACB uguale all' altro ADB: l' esteriore all' interiore; che non può essere [16.I].

E perciò nella medesima linea retta *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*]

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

I segmenti simili di cerchio costituiti nelle linee rette uguali, sono tra loro uguali.

Sieno costituiti nelle uguali linee rette AB, CD [*fig.* 86.] segmenti simili di cerchio AEB, CFD: dico che il segmento AEB sia uguale all' altro CFD.

Imperocchè se s' intenda applicato il segmento AEB all' altro CFD, e la linea retta AB sulla CD; dovrà cadere anche il punto B in D, perchè la AB è uguale alla CD: ed adattandosi la linea retta AB all' altra CD, il segmento AEB dovrà coincidere coll' altro CFD [23. III.]; e per conseguenza gli sarà uguale.

Quindi i segmenti simili di cerchio *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*]

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

Dato un segmento di cerchio, descrivere il cerchio del quale esso è segmento.

Sia dato il segmento di cerchio ABC [*fig.* 87. *n.* 1.2.3.]: fa d' uopo descrivere il cerchio di cui ABC è segmento.

Si divida la AC per metà in D; dal punto D si tiri la DB perpendicolare alla AC, e giungasi la AB; sarà l' angolo ABD o uguale all' altro BAD, o pure ineguale.

Sia primieramente l'angolo ABD [*fig*.87.*n*.1,2.] uguale all' angolo ADB; sarà altresì la AD uguale alla BD [6.I.], e quindi alla DC. Per lo che essendo tra loro uguali le tre linee rette AD, DB, DC, sarà D il centro del cerchio [9.III.]; e quindi se col centro D ed intervallo DA, DB, o DC si descriva il cerchio, questo passerà anche pei gli altri punti, e si sarà descritto il cerchio di cui ABC è segmento. E perchè il centro D è nella AC, il segmento ABC sarà semicerchio.

Che se poi gli angoli ABD, BAD [*fig*.87.*n*.2.*e* 3.] sieno disuguali: si costituisca alla linea retta AB, e nel punto A in essa l' angolo BAE uguale all' altro ABD [23. I.], indi si prolunghi, se bisogna, la BD in E, e giungasi la EC. E poichè l' angolo ABE è uguale all' angolo BAE, sarà la linea retta BE uguale all' altra EA [6. I.]. Or la AD è uguale alla DC, e la DE è comune; quindi le due AD, DE sono uguali alle due CD, DE, l' una all'altra, e l' angolo ADE è uguale all' angolo CDE, poichè ciascuno di essi è retto; adunque la base AE è uguale alla base EC [4. I.]. Ma si è anche dimostrata la AE uguale alla EB: perciò le tre linee rette AE, EB, EC sono uguali tra loro; e quindi E è il centro del cerchio. Laonde se descrivasi il cerchio col centro E, e con un intervallo uguale ad una delle AE, EB, EC, un tal cerchio passerà anche per gli rimanenti punti, e sarà quello che cercavasi. Ed è manifesto, che se l' angolo ABD [*fig*.87.*n*.2.] sia maggiore dell' angolo BAD, il centro E debba cadere fuori del segmento ABC, il quale sarà perciò minore del semicerchio; che se poi l'angolo ABD [*fig*. 87. *n*. 3.] sia minore dell' altro BAD, il centro E cadrà dentro del segmento ABC, il quale sarà perciò maggiore del semicerchio.

Adunque dato un segmento di cerchio, si è descritto il cerchio di cui esso è segmento — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali, gli angoli uguali insistono sopra archi uguali; o che tali angoli stiano ai centri, o pure alle circonferenze.

Sieno i cerchi uguali ABC, DEF [*fig.* 88.], ed in essi gli angoli uguali BGC, EHF ai centri, gli altri BAC, EDF alle circonferenze: dico che l' arco BKC sia uguale all' altro ELF.

Si giungano le BC, EF. Ed essendo uguali i cerchi ABC, DEF saranno altsesì uguali i loro raggi [*def.* 1 III.]: quindi le due BG, GC sono uguali alle due altre EH, HF; è pure l' angolo in G uguale all' angolo in H; adunque la base BC è uguale alla base EF [4. I.]. Or essendo l' angolo in A uguale a quello in D, il segmento BAC sarà simile al segmento EDF [*def.* 11. III.]. Ma sono anche costituiti nelle linee rette uguali BC, EF; ed i segmenti simili di cerchio costituiti nelle uguali linee rette sono uguali [24.III.]; perciò il segmento BAC è uguale al segmento EDF. Per la qual cosa essendo tutto il circolo ABC uguale a tutto il circolo DEF, anche il rimanente segmento BKC dovrà essere uguale al rimanente ELF; e perciò l' arco BKC sarà uguale all' arco ELF.

Adunque ne' cerchi uguali, ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali, gli angoli che insistono sopra archi uguali, sono tra loro uguali, o che stieno ai centri, o pure alle circonferenze.

Ne' cerchi uguali ABC, DEF [*fig.* 89.], sopra gli uguali archi BC, EF insistano gli angoli BGC, EHF ai centri, e gli altri BAC, EDF alle circonferenze: dico che l' angolo BGC sia uguale all' angolo EHF, e l' angolo BAC all' angolo EDF.

Primieramente è chiaro, che se l' angolo BGC sia uguale all' angolo EHF, anche l'angolo BAC dovrà essere uguale all'angolo EDF [20 III.]. Se dunque non è così, uno di quei primi angoli è il maggiore: sia il maggiore BGC; e si costituisca alla linea retta BG, nel punto G in essa, l'angolo BGK uguale all' angolo EHF. E poichè gli angoli uguali posti ai centri di uguali cerchi insistono sopra archi uguali [26. III.]; dovrà essere l' arco BK uguale all' altro EF. Ma l' arco EF è uguale all' arco BC; quindi anche BK sarà uguale a BC: il minore al maggiore; che è impossibile. Non è dunque l'angolo BGC disuguale all' angolo EHF; perciò gli è uguale. É poi l' angolo in A metà dell' angolo BGC; e dell' angolo EHF n' è metà l' angolo in D: quindi l' angolo in A è uguale all' altro in D.

Laonde ne' cerchi uguali *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali, le linee rette uguali tagliano archi uguali, il maggiore al maggiore, ed il minore al minore.

Sieno i cerchi uguali ABC, DEF [*fig.* 90.], ed in essi le linee rette uguali BC, EF, le quali tagliano gli archi maggiori BAC, EDF, ed i minori BGC, EHF: dico che l' arco maggiore BAC è uguale al maggiore EDF, ed il minore BGC al minore EHF.

Si prendano i centri K, L di essi cerchi [1. III.], e giungansi le BK, KC, EL, LF. E poichè i cerchi sono uguali, saranno altresì uguali i loro raggi [*def.* 1. III.]; perciò le due BK, KC sono uguali alle due EL, LF: è anche la base BC uguale alla base EF; quindi l'angolo BKC è uguale all' angolo ELF. Per la qual cosa dovendo gli angoli uguali posti ai centri insistere sopra archi uguali [26. III.], sarà l'arco BGC uguale all' arco EHF. E poichè tutta la circonferenza ABC è uguale a tutta l'altra DEF; dovrà il rimanente arco BAC essere uguale al rimanente EDF.

Adunque ne' cerchi uguali *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali gli archi uguali sono sottesi da linee rette uguali.

Sieno i cerchi uguali ABC, DEF [*fig.* 90.], e si prendano in essi gli archi uguali BGC, EHF, e giungansi le BC, EF: dico che la linea retta BC sia uguale all' altra EF.

Si prendano i centri K, L di essi cerchi [1. III.], giungansi le BK, KC, EL, LF. Or poichè l' arco BGC è uguale all' arco EHF, sarà l' angolo BKC uguale all' angolo ELF [27. III.]. Ma sono uguali i cerchi ABC, DEF, e perciò i loro raggi sono anche uguali; quindi le due BK, KC sono uguali alle due EL, LF; contengono pure uguali angoli; sarà dunque la base BC uguale alla base EF.

E perciò ne' cerchi uguali, ec. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA.

Dato un arco di cerchio dividerlo per metà.

Sia dato l' arco di cerchio ADB [*fig.* 91.]: fa d' uopo dividerlo per metà.

Si giunga la AB, e dividasi per metà in C [10. I.]; indi dal punto C si tiri la CD perpendicolare alla AB, e giungansi le AD, DB.

E poichè la AC è uguale alla CB, e la CD è comune; le due AC, CD sono uguali alle due BC, CD, l'una all'altra; è pure l' angolo ACD uguale all' angolo BCD, essendo ciascuno di essi retto; adunque la base AD è uguale alla base BD. Or le linee rette uguali tagliano archi uguali, il maggiore al maggiore, ed il minore al minore [28. III.]; ed è l' uno e l' altro degli archi AD, DB minore del semicerchio, mentre la DC passa per lo centro: quindi l' arco AD sarà uguale all' arco DB.

E perciò dato un arco di cerchio si è diviso per metà — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

Nel cerchio, l'angolo nel semicerchio è retto; quello, ch'è nel segmento maggiore del semicerchio è minore del retto; e l'altro, ch'è nel segmento minore del semicerchio è maggiore del retto.

Sia il cerchio ABCD, e BC [*fig.* 92.] un diametro di esso, E il centro; e si tiri la CA, che divida il cerchio ne' segmenti ABC, ADC, e giungansi le BA, AD, DC: dico che sia retto l'angolo BAC ch'è nel semicerchio; che quello ch'è nel segmento ABC maggiore del semicerchio, sia minore del retto; e maggiore del retto l'altro ch'è nel segmento ADC minore del semicerchio.

Si giunga la AE, e si prolunghi la BA in F. Ed essendo la BE uguale alla EA; sarà l'angolo EAB uguale all'angolo EBA [5. I.]. Similmente poichè la AE è uguale alla EC, sarà l'angolo EAC uguale all'angolo ECA; quindi tutto l'angolo BAC è uguale ai due angoli ABC, ACB. Ma è pure l'angolo FAC esteriore del triangolo ABC uguale ai due ABC, BCA [32. I.]; adunque l'angolo BAC è uguale all'angolo FAC, e perciò ciascuno di essi è retto. Quindi l'angolo BAC nel semicerchio CAB è retto.

E poichè i due angoli ABC, BAC del triangolo ABC sono minori di due retti [17. I.], e l'angolo BAC è retto; perciò l'altro angolo ABC sarà minore del retto; ed è nel segmento ABC maggiore del semicerchio.

Or il quadrilatero ABCD essendo descritto nel cerchio; ed i quadrilateri descritti ne' cerchi avendo gli angoli opposti uguali a due retti [22. III.]; saranno gli angoli ABC, ADC uguali a due retti. Ma l'angolo ABC è minore del retto; adunque il rimanente ADC sarà maggiore del retto; ed è nel segmento ADC minore del semicerchio.

Inoltre è manifesto che la circonferenza del maggior segmento ABC cada fuori dell' angolo retto CAB; e che la circonferenza del minor segmento ADC cada nell' angolo retto CAF.

E perciò nel cerchio *ec.* — *C.B.D.*

Corollario.

Di qui è manifesto, che se un angolo di un triangolo sia uguale agli altri due, un tal angolo sarà retto: perciocchè il suo adjacente è uguale agli stessi due; e quando gli angoli adjacenti sono uguali, è necessario che sieno retti.

PROPOSIZIONE XXXII.

Teorema.

Se una linea retta tocchi il cerchio, e dal contatto si tiri un' altra linea retta che lo seghi; gli angoli che questa fa colla tangente saranno uguali a quelli costituiti ne' segmenti alterni del cerchio.

La linea retta EF [*fig.* 93.] tocchi il cerchio ABCD in B, e dal punto B si tiri nel cerchio ABCD l' altra linea retta BD che lo seghi: dico che gli angoli che fa questa BD colla tangente EF, sieno uguali a quelli che sono costituiti ne'segmenti alterni del cerchio: vale a dire, che l' angolo FBD sia uguale all' angolo DAB costituito nel segmento DAB, e l' angolo EBD all' altro DCB ch' è costituito nel segmento DCB.

Si tiri dal punto B la BA perpendicolare alla EF, e preso nell' arco BD un qualsivoglia punto C, giungansi le AD, DC, CB. E poichè la linea retta EF tocca il cerchio ABCD nel punto B, e dal contatto B si è tirata la BA perpendicolare ad una tal tangente, il centro del cerchio dovrà essere nella BA [19. III.], onde la BA è il diametro di un tal cerchio, e l'

angolo ADB nel semicerchio è retto [31. III.]: e perciò i rimanenenti angoli BAD, ABD del triangolo BAD sono uguali ad un retto [32. I.]. Ma è anche retto l' angolo ABF; adunque l'angolo ABF è uguale agli angoli BAD, ABD: tolgasi di comune l'angolo ABD, e sarà il rimanente angolo DBF uguale all'angolo BAD, ch'è costituito nel segmento lterno del cerchio. E poichè il quadrilatero ABCD è inscritto el cerchio, i suoi angoli opposti sono uguali a due retti [22. III.]; e perciò gli angoli BCD, BAD sono uguali agli angoli DBF, DBE [13. I.], de' quali BAD si è dimostrato uguale all' ltro DBF; quindi il rimanente DBE sarà uguale all' angolo DCB, ch' è costituito nel segmento alterno del cerchio.

Se dunque una linea retta tocchi il cerchio *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXXIII.

PROBLEMA.

Sopra una data linea retta descrivere un segmento di cerchio, il qual contenga un angolo uguale ad un angolo rettilineo dato.

Sia la data linea retta AB [*fig.* 94. *n.* 1, 2, e 3.], ed il dato angolo rettilineo C: fa d'uopo descrivere sulla data linea retta AB un segmento di cerclo, il quale contenga un angolo uguale all'angolo C.

Se l' angolo C [*fig.* 94 *n.* 1.] è retto, si divida la AB per metà in F, e col centro F ed intervallo AF, o FB si descriva il semicerchio AHB; sarà l'angolo AHB uguale all' angolo retto C [31. III.].

Che se poi l'angolo C [*fig.* 94. *n.* 2. e 3.] non è retto; allora si costituisca alla linea retta AB, nel punto A in essa l' angolo BAD uguale all'angolo C [23. I.], e si tiri dal punto A la AE perpendicolare alla linea retta AD; indi si divida la AB per metà in F, dal punto F si tiri la FG perpendicolare alla AB, e giungasi la GB. E poichè la AF è uguale alla FB, e la FG

è comune; le due AF, FG sono uguali alle due BF, FG: è pure l'angolo AFG uguale all'angolo BFG; perciò la base AG è uguale alla bae GB [4. I.]. Per la qual cosa il cerchio descritto col cenro G ed intervallo AG passerà anche per B: si descriva, e sia AEB. Or poichè dall'estremo A del diametro AE gli si è irata la perpendicolare AD; questa dovrà toccare il cerchio AEL [16. III.]. Ma si è dal contatto A tirata l'altra linea retta AL, che lo sega; quindi l'angolo BAD è uguale a quello che i costituisce nel segmento AEB alterno del cerchio; e perciò essetlo l'angolo BAD uguale all'angolo C, sarà l'angolo C uguale all'angolo AEB.

Adunque sopra la ata linea retta AB si è descritto il segmento di cerchio AHB, il quale contiene un angolo uguale al dato C. — *C.B.F* [*V.N.*]

PROPOS ZIONE XXXIV.

TEOREMA.

Tagliare da un cerhio dato un segmento che contenga un angolo ugual ad un dato angolo rettilineo.

Sia dato il cerchio ABC [*g.* 95.], e l'angolo rettilineo D: fa d'uopo tagliare dal cerchi ABC un segmento, che comprenda un angolo uguale al dato D.

Si tiri la linea retta EF, la uale tocchi il cerchio ABC nel punto B [17. III.]; e poi si costituisca alla linea retta BF, e nel punto B in essa l'ango FBC uguale all'angolo D [23. I.].

E poichè la linea retta EF tocc il cerchio ABC nel punto B, e dal contatto B si è tirata la BC; sarà l'angolo FBC uguale a quello, che si costituisce nel egmento alterno del cerchio [32. III.]. Ma l'angolo FBC è uguale all'angolo D;

adunque anche l'angolo ch'è nel segmento BAC sarà uguale all' angolo D.

E perciò dal dato cerchio ABC si è tagliato il segmento BAC, che contiene un angolo uguale al dato angolo rettilineo D. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.

Se nel cerchio due linee rette si seghino scambievolmente; il rettangolo contenuto da' segmenti di una è uguale a quello che si contiene da' segmenti dell' altra.

Si seghino scambievolmente nel cerchio ABCD [*fig.* 96. *n.* 1,2, e 3.] le due linee rette AC, BD nel punto E: dico che il rettangolo contenuto dalle AE, EC sia uguale a quello che si contiene dalle DE, EB.

Poichè se le AC, BD [*fig.*96.*n.*1.] passino per lo centro, sia E un tal centro, è manifesto, che essendo uguali le AE, EC, DE, EB, il rettangolo contenuto dalle AE, EC sia uguale a quello che si contiene dalle DE, EB.

Passi adesso una delle linee rette BD [*fig.*96 *n.*2.] per lo centro, e seghi ad angoli retti in E l'altra AC, che non passa per lo centro. Si divida per metà la BD in F, sarà F il centro del cerchio ABCD; si giunga la AF. E poichè la linea retta BD tirata per lo centro sega ad angoli retti l'altra retta linea AC non tirata per lo centro, sarà la AE uguale alla EC [3. III.]. Or essendo la linea retta BD divisa in parti uguali nel punto F, ed in parti disuguali nel punto E; il rettangolo di BE, ED insieme col quadrato di EF è uguale al quadrato di FA [5. II.]. Ma al quadrato di FA sono pure uguali i quadrati di AE, e di EF [47. I.]; perciò il rettangolo di BE, ED insieme col quadrato di EF è uguale ai quadrati di AE, e di EF: si tol-

ga il comune quadrato di EF, e sarà il rimanente rettangolo di BE, ED uguale al rimanente quadrato di AE, cioè al rettangolo di AE, EC.

Che se la BD tirata per lo centro [*fig*.96.*n*.3.], non seghi ad angoli retti l' altra AC non tirata per lo centro, nel punto E; similmente si divida la BD per metà in F, sarà F il centro del cerchio; indi si unisca la AF, e dal centro F si tiri alla AC la perpendicolare FG [12. I.]; sarà la AG uguale alla GC; e perciò il rettangolo di AE, EC insieme col quadrato di EG è uguale al quadrato di AG [5. II.]: laonde se vi si aggiunga di comune il quadrato di GF, sarà il rettangolo di AE, EC insieme co' quadrati di EG e di GF uguale ai quadrati di AG e di GF. Ma ai quadrati di EG e di GF è uguale il quadrato di EF, ed ai quadrati di AG e di GF è uguale il quadrato di AF; quindi il rettangolo di AE, EC insieme col quadrato di EF è uguale al quadrato di AF, o sia di FB. Or anche il rettangolo di DE, EB insieme col quadrato di FE è uguale al quadrato di FB [5. II.]; perciò il rettangolo di AE, EC insieme col quadrato di FE è uguale al rettangolo di DE, EB insieme col quadrato di FE; e quindi tolto il comune quadrato di FE, sarà il rimanente rettangolo di AE, EC uguale al rimanente rettangolo di DE, EB.

Finalmente nè l'una nè l'altra delle AC, BD [*fig*.94.*n*.4.] passi per lo centro F del cerchio ABCD. Si tiri per lo punto E, ove s'intersegano quelle linee rette, il diametro GEFH. Ed essendosi il rettangolo di AE, EC poc'anzi dimostrato uguale all' altro di GE, EH, e che a questo stesso rettangolo di GE, EH è altresì uguale quello di BE, ED; sarà il rettangolo di AE, EC uguale a quello di BE, ED.

E quindi se nel cerchio due linee rette *ec*.—*C.B.D.*[*V.N.*]

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

Se fuori del cerchio si prenda un qualunque punto, e da questo cadano nel cerchio due linee rette, delle quali una seghi il cerchio, l' altra lo tocchi; il rettangolo contenuto da tutta la segante, e dal segmento esteriore, ch' è tra il punto e la circonferenza convessa, sarà uguale al quadrato della tangente.

Fuori del cerchio ABC [*fig*.97.*n*.1.*e*.2.] si prenda un qualunque punto D, dal quale cadano nel detto cerchio le due linee rette DCA, e DB, delle quali la DCA seghi il cerchio ABC, e la DB lo tocchi: dico che il rettangolo di AD, DC sia uguale al quadrato di DB.

Imperocchè la linea retta DCA o passa per lo centro, o non passa. Passi primieramente per lo centro del cerchio ABC, che sia E [*fig*.97.*n*.1.], e giungasi la EB: sarà retto l' angolo EBD [18. III.]; e perciò la linea retta AC trovandosi divisa per metà in E, ed aggiunta per diritto ad essa la CD: il rettangolo di AD, DC insieme col quadrato di EC sarà uguale al quadrato di ED [6. II.]. Ma la CE è uguale alla EB; adunque il rettangolo di AD, DC insieme col quadrato di EB è uguale al quadrato di ED. Or il quadrato di ED è uguale ai quadrati di EB e di BD, perchè è retto l' angolo EBD [47.I.]; quindi il rettangolo di AD, DC insieme col quadrato di EB è uguale ai quadrati di EB e di BD: toltone il comune quadrato di EB, sarà il rimanente rettangolo di AD, DC uguale al quadrato della tangente DB.

Or non passi la segante DCA [*fig*.97.*n*.2.] per lo centro del cerchio ABC: si prenda il centro E, e da E si abbassi sopra la AC la perpendicolare EF [12.I], e giungansi le EB, EC, ED: adunque è retto l' angolo EFD. E poichè la linea retta

EF, tirata per lo centro, sega la linea retta AC, non tirata per lo centro, ad angoli retti, la dividerà per metà [3. III.]; ed è perciò la AF uguale alla FC. Inoltre poichè la linea retta AC è divisa in parti uguali in F, e le sta per diritto la CD; il rettangolo di AD, DC insieme col quadrato di FC dovrà essere uguale al quadrato di FD [6. II.]: si aggiunga di comune il quadrato di FE; sarà il rettangolo di AD, DC insieme co'quadrati di CF e di FE uguale ai quadrati di DF e di FE. Ma ai quadrati di DF e di FE è uguale il quadrato di DE, perchè è retto l'angolo EFD [47. I.]; ed ai quadrati di CF e di FE è uguale il quadrato di CE: perciò il rettangolo di AD, DC insieme col quadrato di CE è uguale al quadrato di ED. Ma sono anche i quadrati di EB e di BD uguali al quadrato di ED, per esser retto l'angolo EBD [47. I.], adunque il rettangolo di AD, DC insieme col quadrato di EB è uguale ai quadrati di EB e di BD: tolgasi il comune quadrato di EB; sarà il rimanente rettangolo di AD, DC uguale al quadrato di BD.

Laonde se fuori di un cerchio *cc.* — *C.B.D.*

Corollario

Quindi se da un punto fuori del cerchio si tirino due linee rette che lo seghino, come le DA, DG; i rettangoli contenuti da tutte queste linee, e dalle loro parti corrispondenti fuori del cerchio saranno uguali tra loro, cioè il rettangolo di AD, DC sarà uguale al rettangolo di GD, DH. Perchè ciascuno di essi è uguale allo stesso quadrato della retta DB che tocca il cerchio. [*F.N.*]

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

Se fuori del cerchio si prenda un qualunque punto, e da quello cadano nel cerchio due linee rette, una che lo seghi, l'altra che lo incontri, e'l rettangolo contenuto da tutta la segante e dalla parte sua esteriore, che è fra il punto e la circonferenza convessa sia uguale al quadrato della linea che incontra il cerchio; questa linea toccherà il cerchio.

Fuori del cerchio ABC [*fig.* 98.] si prenda un qualunque punto D, e da esso cadano nel cerchio ABC le due linee rette DCA, DB, e la DCA sia una segante del cerchio, la DB poi lo incontri, ed il rettangolo di AD, DC sia uguale al quadrato di DB: dico che questa DB tocchi il cerchio ABC.

Si tiri la linea retta DE, che tocchi il cerchio ABC [17.III.]; poi si prenda il centro di questo cerchio ACB, che sia F, e giungansi le FE, FB, FD; sarà retto l'angolo FED. [18.III.]. E poichè la DE tocca il cerchio ABC, e la DCA lo sega, sarà il rettangolo di AD, DC uguale al quadrato di DE [36.III.]: ma il rettangolo di AD, DC si suppone uguale al quadrato di DB; adunque il quadrato di DE sarà uguale al quadrato di DB; e perciò la linea retta DE sarà uguale all'altra DB. Ed è pure la FE uguale alla FB: perciò le due DE, EF sono uguali alle due DB, BF, l'una all'altra; la base FD è comune; adunque l'angolo DEF è uguale all'angolo DBF. Ma l'angolo DEF è retto; quindi anche l'altro DBF sarà retto. È poi la FB prolungata un diametro, e la linea retta, che si tira perpendicolare al diametro di un cerchio, nell'estremità di esso, tocca il cerchio [16. III.]; adunque la DB tocca il cerchio ABC.

E perciò se fuori di un cerchio *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*]

FINE DEL TERZO LIBRO.

IL QUARTO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE.

DEFINIZIONI.

Una figura rettilinea si dice esser *inscritta* in un'altra figura rettilinea, quando ciascun angolo della figura inscritta tocca ciascun lato di quella nella quale è inscritta.

N. B La frase *angolo che tocca una linea*, o pure *linea che tocca un angolo*, si usa da' geometri per dinotare, che tal linea passa per lo vertice dell' angolo, senza dividerlo.

II. Similmente una figura rettilinea si dice esser *circonscritta* ad un' altra, allorchè ciascun lato della circonscritta tocca ciascun angolo della figura alla quale è circonscritta.

III. Una figura rettilinea si dice esser *inscritta* nel cerchio, quando ciascun angolo della figura rettilinea inscritta tocca la circonferenza del cerchio.

IV. Una figura rettilinea si dice esser *circonscritta* al cerchio, quando ciascun lato della figura rettilinea circonscritta tocca la circonferenza del cerchio.

V. Il cerchio si dice esser *inscritto* in una figura rettilinea, quando ciascun lato di questa tocca la circonferenza del cerchio che in essa s'inscrive.

VI. Il cerchio si dice esser *circonscritto* ad una figura rettilinea, allorchè la circonferenza del cerchio tocca ciascun angolo della figura rettilinea cui esso si circonscrive.

VII. Una retta si dice essere *adattata* nel cerchio, quando i suoi termini sono nella circonferenza del cerchio.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

In un dato cerchio adattare una linea retta uguale ad un' altra retta linea data, che non sia maggiore del diametro del cerchio.

Sia dato il cerchio ABC [*fig.* 99.], e data la linea retta D, non maggiore del diametro del cerchio: fa d'uopo adattare nel cerchio ABC una linea retta uguale all'altra D.

Si tiri il diametro CB del cerchio ABC; e se BC sia uguale a D, sarà già fatto ciò che proponevasi; poichè nel cerchio ABC si sarà adattata la linea retta BC uguale all' altra D. Se poi non è uguale, la BC sarà maggiore della D, e perciò pongasi la CE uguale alla D, col centro C ed intervallo CE si descriva il cerchio AEF, e giungasi la CA. Ed essendo il punto C centro del cerchio AEF, sarà la CA uguale alla CE: ma la D è pure uguale alla CE; adunque sarà la D uguale alla AC.

E perciò nel dato cerchio ABC si è adattata la linea retta AC uguale alla data D che non è maggiore del diametro del cerchio. *cc.* — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

In un dato cerchio inscrivere un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato.

Sia ABC [*fig.* 100.] il dato cerchio, e DEF il dato triangolo: fa d' uopo inscrivere nel cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF.

Tirisi la linea retta GAH, che tocchi il cerchio ABC nel punto A [17. III.], ed alla linea retta AH, nel punto A in essa, si costituisca l' angolo HAC uguale all' angolo DEF; poi alla linea retta AG, nel punto A in essa, si costituisca l'angolo GAB uguale all' angolo DFE, e giungasi la BC.

Poichè la linea retta HAG tocca il cerchio ABC, e dal punto del contatto si è tirata la AC, sarà l' angolo HAC uguale all' angolo ABC, ch'è costituito nel segmento alterno del cerchio [32. III.]: ma l'angolo HAC è uguale all'angolo DEF; adunque anche l' angolo ABC è uguale all' angolo DEF. Per la stessa ragione è pure l' angolo ACB uguale all' angolo DFE; quindi il rimanente angolo BAC sarà uguale al rimanente EDF [32. I.]; e perciò il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF: ed è inscritto nel cerchio ABC.

Adunque nel dato cerchio si è inscritto un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato. *ec.* — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Circonscrivere ad un cerchio dato un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato.

Sia ABC [*fig.* 101.] il dato cerchio, e DEF il dato

triangolo: fa d'uopo circonscrivere al cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF.

Si prolunghi la EF da ambe le parti ne' punti G, H, e preso il centro K del cerchio ABC tirisi comunque la linea retta KB, e nel punto K della linea retta KB si costituisca l' angolo BKA uguale all' angolo DEG [23. I.], e l'angolo BKC uguale all' angolo DFH; di poi per gli punti A, B, C si tirino le linee rette LAM, MBN, NCL che tocchino il cerchio ABC [17. III.].

Perchè dunque le LM, MN, NL toccano il cerchio ABC ne' punti A, B, C, e dal centro K si sono tirate a questi punti A, B, C le linee rette KA, KB, KC; saranno retti gli angoli in A, B, C [18. III.]; che perciò congiugnendo la BA, gli angoli MAB, MBA risulteranno minori di due retti; onde le linee rette AM, BM dovranno incontrarsi [*post*. 5.]. E similmente si dimostrerà, che si debbano incontrare tra loro le BN, CN, come pure le CL, AL. E perchè i quattro angoli del quadrilatero AMBK sono uguali a quattro retti, dividendosi esso in due triangoli, gli angoli de' quali KAM, KBM sono retti; perciò i rimanenti angoli AKB, AMB saranno uguali a due retti. Sono poi anche gli angoli DEG, DEF uguali a due retti; quindi gli angoli AKB, AMB sono uguali agli angoli DEG, DEF, de' quali AKB è uguale a DEG; adunque il rimanente AMB sarà uguale al rimanente DEF. Dimostreremo similmente, che l' angolo LNM è uguale all' altro DFE; perciò il rimanente MLN è uguale al rimanente EDF [32. I.]. Laonde il triangolo LMN è equiangolo al triangolo DEF; ed è poi circonscritto al cerchio ABC.

Quindi ad un dato cerchio si è circonscritto un triangolo equiangolo ad un triangolo dato, ec. — C. B. F.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

In un dato triangolo inscrivere il cerchio.

Sia dato il triangolo ABC [*fig.* 102.]: fa d'uopo inscrivere il cerchio in esso triangolo ABC.

Si dividano per metà gli angoli ABC, BCA colle linee rette BD, CD [9. I.], le quali concorrano insieme nel punto D, e da questo punto D si tirino le perpendicolari DE, DF, DG alle linee rette AB, BC, CA [11. I.]. E poichè l'angolo ABD è uguale all'angolo CBD, ed è pure l'angolo retto BED uguale al retto BFD; saranno due triangoli EBD, DBF, che hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, cioè il lato BD ch'è comune ad entrambi, il quale sottende uno degli angoli uguali; adunque essi avranno anche i rimanenti lati uguali a' rimanenti lati [26. I.], e sarà DE uguale a DF. Per la stessa ragione sarà pure DG uguale a DF; onde DE è uguale a DG; e perciò le tre linee rette DE, DF, DG sono tra loro uguali. Per la qual cosa il cerchio descritto col centro D e coll' intervallo uguale ad una delle DE, DF, DG passerà anche per gli rimanenti punti, e toccherà le linee rette AB, BC, CA, poichè sono retti gli angoli in E, F, G; e quella linea retta che si tira perpendicolare al diametro di un cerchio, nell'estremità sua, tocca il cerchio [16. III.]. Adunque ciascuna delle AB, BC, CA tocca il cerchio; e questo sarà perciò inscritto nel triangolo ABC.

Quindi nel dato triangolo ABC si è inscritto il cerchio EFG. *cc.* — *C.B.F.*[*V.N.*]

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

Ad un dato triangolo circonscrivere il cerchio.

Sia dato il triangolo ABC [*fig.*103.*n.*1, 2,3.]: fa d' uopo circonscrivere il cerchio al dato triangolo ABC.

Si dividano per metà le AB, AC ne' punti D, E, e da questi punti si tirino alle AB, AC le perpendicolari DF, EF, le quali prolungate dovranno necessariamente incontrarsi; poichè congiunta la DE, gli angoli EDF, DEF risultano minori di due retti [*post.*5.]. S'incontrino in F, e giungansi le BF, FC, FA. E poichè la AD è uguale alla DB, e la DF è comune e forma con ciascuna di quelle un angolo retto, sarà la base AF uguale alla base FB [4. I.]. Similmente si dimostrerà la CF uguale alla FA; adunque anche la BF è uguale alla FC; e perciò le tre linee rette FA, FB, FC sono uguali tra loro. Per la qual cosa il cerchio descritto col centro F ed intervallo uguale ad una delle FA, FB, FC passerà anche per gli rimanenti punti, e sarà quindi il cerchio circonscritto al triangolo ABC.

Adunque ad un dato triangolo si è circonscritto il cerchio. *ec.* — *C.B.F* [*V. N.*]

COROLLARIO.

È manifesto, che quando il centro del cerchio cade dentro il triangolo, ciascun angolo di questo, esistendo in un segmento maggiore del semicerchio, sia minore del retto [31. III.]. Che se poi il centro cada in uno de'lati, l'angolo ch'è sotteso da questo lato, esistendo nel semicerchio, sarà retto; e cadendo il centro fuori il triangolo, dalla parte di uno de' lati, l' angolo ch' è sotteso da questo lato, esistendo in un segmento minore del

semicerchio, sarà maggiore del retto. E perciò se il triangolo dato sia acutangolo, il centro cadrà dentro il triangolo; se sia rettangolo, cadrà il centro in quel lato, che sottende l'angolo retto; e se sia ottusangolo, il centro cadrà fuori il triangolo, dalla parte del lato opposto all'angolo ottuso.

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

In un dato cerchio inscrivere un quadrato.

Sia dato il cerchio ABCD [*fig.* 104.]: fa d'uopo inscrivere un quadrato nel cerchio ABCD.

Si tirino i diametri AC, BD del cerchio ABCD ad angoli retti tra loro, e giungansi le AB, BC, CD, DA.

Or poichè la BE è uguale alla DE, essendo E il centro, e la EA è comune, e fa angoli retti, sarà la base BA uguale alla base AD [4. I.]. Per la stessa ragione l'una e l'altra di esse BC, CD è uguale all'una e l'altra BA, AD; adunque il quadrilatero ABCD è equilatero. Dico che sia anche rettangolo. Imperocchè essendo la linea retta BD diametro del cerchio ABCD, sarà BAD un semicerchio; e perciò l'angolo BAD è retto [31. III.]: e per la stessa ragione è retto ciascuno degli altri angoli ABC, BCD, CDA; ond'è che il quadrilatero ABCD è rettangolo: ma si è dimostrato esser equilatero; sarà dunque quadrato: ed è inscritto nel cerchio ABCD.

Quindi nel dato cerchio ABCD si è inscritto il quadrato ABCD. *ec.* — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA.

Ad un dato cerchio circonscrivere un quadrato.

Sia dato il cerchio ABCD [*fg.* 105.] : fa d'uopo circonscrivere ad esso un quadrato.

Si tirino i due diametri BC , AD del cerchio ABCD , l'uno perpendicolare all'altro ; e poi per gli punti A , B , C , D si tirino le linee FG, GH , HK, KF , che tocchino il cerchio ABCD. [17. III]

E poichè la FG tocca il cerchio ABCD , e dal centro al contatto A si è tirata la EA , saranno retti gli angoli in A [18. III.] : e per la stessa ragione sono retti gli angoli ne'punti B, C, D. Or essendo retto l' angolo AEB , ed anche retto l'altro EBG, sarà la GH parallela alla AC [28. I.]; e per la stessa ragione la AC è parallela alla FK. Dimostreremo similmente, che tanto la GF , quanto la HK sia parallela alla BED ; perciò i quadrilateri GK , GC , AK , FB, BK sono parallelogrammi , e quindi sarà la GF uguale alla HK , e la GH alla FK [34. I.]. Laonde essendo la AC uguale alla BD, e la AC uguale sì alla GH , che alla FK ; e parimente la BD uguale sì alla GF , che alla HK ; sarà l' una e l' altra GH , FK uguale all' una e l' altra GF , HK ; e perciò il quadrilatero FGHK è equilatero. Dico che sia anche rettangolo . Poichè essendo GEA un parallelogrammo , che ha l' angolo AEB retto ; sarà anche retto l' altro AGB [34. I.]. Similmente dimostreremo esser retti gli angoli ne' punti H , K , F ; quindi il quadrilatero FGHK è rettangolo : ma si è dimostrato equilatero ; è dunque un quadrato ; ed è circonscritto al cerchio ABCD.

Perciò ad un dato cerchio si è circonscritto un quadrato. *ec.* — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

In un dato quadrato inscrivere il cerchio.

Sia dato il quadrato ABCD [*fig.*106.] fa d'uopo inscrivere in esso il cerchio.

Si divida per metà ciascuna delle AB, AD ne'punti F, E, e per E si tiri la EH parallela ad una di esse AB, CD, per F la FK parallela ad una delle AD, BC: è dunque parallelogrammo ciascuno de' quadrilateri AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD; e perciò sono uguali i loro lati opposti [34. I.]. Or essendo la DA uguale alla AB, e la AE metà della AD, la AF metà della AB, sarà la AE uguale alla AF; onde sono anche uguali i lati opposti ad essi; e perciò la FG è uguale alla GE. Dimostreremo similmente, che sì la GH che la GK sia uguale all' una e l'altra FG, GE; quindi le quattro linee rette GE, GF, GH, GK sono uguali tra loro: che perciò il cerchio descritto col cento G ed intervallo uguale ad una delle GE, GF, GH, GH passerà anche per gli rimanenti punti, e toccherà le linee rette AB, BC, CD, DA, perchè sono retti gli angoli ne' punti E, F, H, K; e la linea retta tirata perpendicolare al diametro di un cerchio, nell' estremità di esso, tocca il cerchio: laonde le linee rette AB, BC, CD, DA toccano il cerchio; e perciò un tal cerchio sarà inscritto nel quadrato ABCD.

Adunque nel dato quadrato si è inscritto il cerchio — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Ad un quadrato dato circonscrivere il cerchio.

Sia dato il quadrato ABCD [*fig.* 107.] : fa d'uopo circonscrivere ad esso il cerchio.

Giungansi le AC, BD, le quali s' interseghino in E. Ed essendo la DA uguale alla AB, e la AC comune; le due AD, AC sono uguali alle due BA, AC, e la base DC è uguale alla base CB; quindi sarà l' angolo DAC uguale all'angolo BAC : adunque l' angolo DAB è diviso per metà dalla linea retta AC. Similmente dimostreremo, che ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDA sia diviso per metà dalle linee rette AC, DB. Or essendo l' angolo DAB uguale all' angolo ABC, e l' angolo EAB metà dell'angolo DAB, e l'altro angolo EBA metà dell'angolo ABC, sarà l'angolo EAB uguale all'angolo EBA: quindi il lato EA sarà uguale al lato EB. Similmente dimostreremo, che ciascuna delle linee rette EC, ED sia uguale a ciascuna delle EA, EB; onde le quattro linee rette EA, EB, EC, ED sono uguali tra loro. Per la qual cosa il cerchio descritto col centro E ed intervallo una delle EA, EB, EC, ED dovrà anche passare per gli rimanenti punti, e sarà circonscritto al quadrato ABCD.

Adunque al dato quadrato si è circonscritto il cerchio — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Costituire un triangolo isoscele che abbia ciascuno degli angoli alla base doppio del rimanente.

Si esponga una qualche linea retta AB [*fig.* 108.], la quale si divida nel punto C in modo, che il rettangolo contenuto dalle AB, BC sia uguale al quadrato di CA [11. II.]; e col centro A ed intervallo AB si descriva il cerchio BDE, nel quale si adatti la linea retta BD uguale alla AC, che non è maggiore del diametro del cerchio BDE [1. IV.]; indi congiunte le AD, DC, si circonscriva al triangolo ADC il cerchio ACD [5. IV.].

Or essendo il rettangolo di AB, BC uguale al quadrato di AC, e la AC uguale alla BD; sarà il rettangolo di AB, BC uguale al quadrato di BD. Per lo che essendosi preso fuori del cerchio ACD il punto B, dal quale cadono in tal cerchio le due linee rette BCA, BD, la prima delle quali sega il cerchio, l'altra lo incontra; ed il rettangolo di AB, BC è uguale al quadrato di BD; la linea retta BD dovrà toccare il cerchio [37. III.]. E perchè la DB tocca il cerchio ACD, e dal contatto D si è tirata la DC, sarà l'angolo BDC uguale a quello che si costituisce nel segmento alterno del cerchio, cioè all'angolo DAC [32. III.]. Or poichè l'angolo BDC è uguale all'altro DAC, aggiunto ad essi di comune l'angolo CDA, sarà tutto l'angolo BDA uguale ai due altri CDA, DAC: ma agli angoli CDA DAC è altresì uguale l'esteriore BCD [32. I.]; adunque l'angolo BDA, è uguale all'altro BCD: è poi l'angolo BDA uguale all'angolo ABD, perchè il lato AD è uguale al lato AB; quindi sarà anche DBA uguale a BCD; e perciò sono tra loro uguali i tre angoli BDA, DBA, BCD. E essendo l'angolo DBC uguale all'altro BCD, il lato BD è uguale al lato

DC: ma BD si è posto uguale a CA; adunque anche AC è uguale a CD; e perciò l' angolo CDA è uguale all' angolo DAC [5. I.]; onde gli angoli CDA, DAC presi insieme sono il doppio dell' angolo DAC: è poi l' angolo BCD uguale agli angoli CDA, DAC; adunque anche BCD è doppio di DAC. Ma l' angolo BCD è uguale a ciascuno degli altri BDA, DBA; perciò ciascun di questi BDA, DBA è doppio di DAB.

Si è dunque costituito il triangolo isoscele ADB, che ha ciascuno degli angoli alla base doppio del rimanente. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

In un dato cerchio inscrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia dato il cerchio ABCDE [*fig.* 109.]: fa d' uopo inscrivere nel cerchio ABCDE un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Costituiscasi un triangolo isoscele FGH, il quale abbia ciascuno degli angoli in G, ed H doppio dell' angolo in F [10. IV.]; di poi s' inscriva nel cerchio ABCDE il triangolo ACD equiangolo al triangolo FGH [2. IV.], dimodochè all'angolo in F sia uguale l' angolo CAD, ed a ciascuno di quelli, che sono in G ed H sia uguale ciascuno degli altri ACD, CDA; quindi l' uno e l' altro degli angoli ACD, CDA è doppio dell' angolo CAD. Si divida per metà ciascuno di questi angoli ACD, CDA colle linee rette CE, DB, e giungansi le AB, BC, DE, EA.

E poichè ciascuno degli angoli ACD, CDA è doppio dello stesso angolo CAD, e si sono quelli divisi per metà colle linee rette CE, DB; perciò i cinque angoli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA saranno tra loro uguali. Or angoli uguali insistono sopra archi uguali [26. III.]; laonde i cinque archi AB, BC, CD,

DE, EA sono uguali tra loro: ma archi uguali sono sottesi da linee rette uguali [29. III.]; quindi sono anche uguali tra loro le cinque linee rette AB, BC, CD, DE, EA; e perciò il pentagono ABCDE è equilatero.

Dico che sia anche equiangolo. Imperocchè essendo l'arco AB uguale all'arco DE, aggiuntovi di comune l'arco BCD, sarà tutto l'arco ABCD uguale a tutto l'arco EDCB: ma sull'arco ABCD v'insiste l'angolo AED, e sull'altro EDCB insiste l'angolo BAE; adunque l'angolo AED è uguale all'altro BAE. Per la stessa ragione ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDE è uguale a ciascuno di essi BAE, AED; quindi il pentagono ABCDE è equiangolo; e si è già dimostrato equilatero.

Adunque in un cerchio dato si è inscritto un pentagono equilatero ed equiangolo. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Ad un dato cerchio circonscrivere un pentagono equilatero ed equiangolo.

Sia dato il cerchio ABCDE [*fig.* 110.]: fa d'uopo circonscrivere al cerchio ABCDE un pentagono equilatero ed equiangolo.

Si concepiscano essere A, B, C, D, E i vertici degli angoli del pentagono inscritto in un tal cerchio [11. IV.], in modo che gli archi AB, BC, CD, DE, EA sieno uguali; e pe' punti A, B, C, D, E si tirino al cerchio le tangenti GH, HK, KL, LM, MG [17. III.]: indi preso il centro F del cerchio ABCDE, giungansi le FB, FK, FC, FL, FD.

E poichè la linea retta KL tocca il cerchio ABCDE nel punto C, e dal centro F al contatto C si è tirata la FC; sarà la FC perpendicolare alla KL [18. III.], onde è retto ciascu-

to degli angoli in C; e per la stessa ragione sono anche retti ciascuno degli angoli in B ed in D. Or essendo retto l'angolo FCK, il quadrato di FK è uguale ai quadrati di FC e di CK [47. I.]: similmente il quadrato di FK è uguale ai quadrati di FB e di BK; adunque i quadrati di FC e di CK sono uguali ai quadrati di FB e di BK: ma di questi quadrati, quello di FC è uguale all' altro di FB; quindi il rimanente quadrato di CK sarà uguale al rimanente quadrato di BK, e però la BK è uguale alla CK. Ed essendo FB uguale ad FC, ed FK comune; le due BF, FK sono uguali alle due CF, FK: è pure la base BK uguale alla base KC; sarà dunque l' angolo BFK uguale all'angolo KFC [8. I.], e l'angolo BKF all' angolo CKF; onde l' angolo BFC è doppio dell'altro KFC, e l' angolo BKC è doppio dell' angolo FKC. Per la stessa ragione anche l' angolo CFD è doppio dell' altro CFL, e l'angolo CLD è doppio di CLF. Or essendo l' arco BC uguale all' arco CD, l'angolo BFC sarà uguale all' angolo CFD [27. III.]: ma l' angolo BFC è doppio dell' angolo KFC, come pure l'angolo DFC è doppio di LFC: quindi l' angolo KFC è uguale all' angolo CFL. Per la qual cosa i due triangoli FKC, FLC avendo due angoli uguali a due angoli, l' uno all' altro, ed un lato uguale ad un lato, cioè FC, che ad essi è comune; avranno i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati, ed il rimanente angolo uguale al rimanente angolo [26. I.]; è dunque la linea retta KC uguale all' altra CL, e l' angolo FKC uguale all' angolo FLC. E poichè KC è uguale a CL, sarà la KL doppia della KC; e per la stessa ragione anche la KH è doppia della BK. Adunque essendosi dimostrata la BK uguale alla KC; ed essendo poi la KL doppia della KC, come pure la HK doppia della BK; sarà la HK uguale alla KL: e della stessa maniera, ciascuna delle GH, GM, ML si dimostrerà uguale all' una e l' altra HK, KL. Quindi il pentagono GHKLM è equilatero.

Dico che sia anche equiangolo. Poichè essendo l' angolo FKC uguale all' angolo FLC; ed essendosi dimostrato l' angolo HKL doppio di FKC, e l' angolo KLM doppio di FLC; sarà

l'angolo HKL uguale all'angolo KLM. In simil modo si dimostrerà ciascuno degli angoli KHG, HGM, GML uguale a ciascuno degli angoli HKL, KLM. Adunque i cinque angoli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH sono uguali tra loro; e perciò il pentagono GHKLM è equiangolo: si è dimostrato essere equilatero; ed è circonscritto al cerchio ABCDE. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

In un dato pentagono equilatero, ed equiangolo inscrivere il cerchio.

Sia dato il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE [*fig.* 111.]: fa d'uopo inscrivere il cerchio nel pentagono ABCDE.

Si divida per metà ciascuno degli angoli BCD, CDE colle linee rette CF, DF; e dal punto F nel quale tra loro convengono le CF, DF, si tirino le linee rette FB, FA, FE.

E poichè la BC è uguale alla CD, e la CF è comune; le due BC, CF sono uguali alle due DC, CF, è anche l'angolo BCF uguale all'angolo DCF; adunque la base BF è uguale alla base FD, il triangolo BCF è uguale al triangolo DCF, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, l'uno all'altro, quelli cioè, che sono sottesi dai lati uguali [4. I.]: quindi l'angolo CBF è uguale all'angolo CDF. E poichè l'angolo CDE è doppio dell'angolo CDF, e l'angolo CDE è uguale all'angolo ABC, l'angolo CDF all'altro CBF; sarà l'angolo CBA doppio dell'angolo CBF; e perciò l'angolo ABF è uguale all'angolo FBC: onde l'angolo ABC è anch'esso diviso per metà dalla linea retta BF. Si dimostrerà similmente che ciascuno degli angoli BAE, AED sia diviso per metà dalle linee rette AF, FE.

Or dal punto F si tirino alle linee rette AB, BC, CD, DE, EA le perpendicolari FG, FH, FK, FL, FM. E poi-

chè l' angolo HCF è uguale all' altro KCF; ed è il retto FHC uguale al retto FKC: perciò i due triangoli FHC, FKC che hanno due angoli uguali a due angoli, l' uno all' altro, ed un lato uguale ad un lato, cioè FC, ch' è comune ad entrambi, ed il quale sottende uno degli angoli uguali, avranno i rimanenti lati uguali a' rimanenti lati [26. I.], e sarà la perpendicolare FH uguale alla perpendicolare FK. Si dimostrerà similmente ciascuna delle FL, FM, FG uguale all' una e l' altra FH, FK: quindi le cinque linee rette FG, FH, FK, FL, FM sono uguali tra loro; e perciò, descritto il cerchio col centro F ed intervallo una delle FG, FH, FK, FL, FM, questo passerà anche per gli rimanenti punti, e toccherà le linee rette AB, BC, CD, DE, EA, perchè sono retti gli angoli in G, H, K, L, M; e quella linea retta, che si tira perpendicolare al diametro di un cerchio, nell' estremità di esso, tocca il cerchio [16. III.]. Adunque ciascuna delle AB, BC, CD, DE, EA tocca il cerchio; e perciò questo sarà inscritto nel pentagona ABCDE.

Quindi nel dato pentagono equilatero, ed equiangolo si è inscritto il cerchio. C.B.F.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

Ad un dato pentagono equilatero, ed equiangolo circonscrivere il cerchio.

Sia dato il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE [*fig.* 112.]: fa d' uopo circonscrivere ad esso il cerchio.

Ciascuno degli angoli BCD, CDE si divida per metà colle linee rette CF, FD, e dal punto F nel quale tali linee rette convengono si tirino ai punti B, A, E le FB, FA, FE.

Si dimostrerà come nella precedente, che ciascuno degli angoli CBA, BAE, AED sia diviso per metà dalle linee rette BF, FA, FE. Ed essendo l' angolo BCD uguale all' altro CDE,

e dell'angolo BCD essendone metà l'angolo FCD, come pure dell' angolo CDE essendone metà l'altro CDF, sarà l'angolo FCD uguale all' angolo FDC; onde il lato CF è uguale al lato FD. Si dimostrerà similmente, che ciascuna delle FB, FA, FE sia uguale all' una e l'altra FC, FD; adunque le cinque linee rette FA, FB, FC, FD, FE sono uguali tra loro: che perciò il cerchio descritto col centro F ed intervallo una di esse FA, FB, FC, FD, FE passerà anche per gli rimanenti punti, e sarà circonscritto al pentagono ABCDE, ch' è equilatero, ed equiangolo: descrivasi, e sia ABCDE.

Laonde ad un dato pentagono equilatero, ed equiangolo si è circonscritto il cerchio *ec.* — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

Inscrivere in un dato cerchio un esagono equilatero, ed equiangolo.

Sia dato il cerchio ABCDEF [*fig.* 113.]: fa d' uopo inscrivere in questo cerchio ABCDEF un esagono equilatero, ed equiangolo.

Si prenda il centro G del cerchio ABCDEF, e tirisi un diametro AD; di poi col centro G ed intervallo DG si descriva il circolo EGCH, e giunte le EG, CG, si prolunghino ne' punti B, F, ed uniscansi le AB, BC, CD, DE, EF, FA: dico che l'esagono ABCDEF sia equilatero, ed equiangolo.

Poichè il punto G è centro del cerchio ABCDEF, sarà la GE uguale alla GD. E similmente poichè D è centro del cerchio EGCH, sarà la DE uguale alla DG: ma la GE si è dimostrata uguale alla GD; sarà dunque la GE uguale altresì alla ED: quindi il triangolo EGD è equilatero, e perciò i tre suoi angoli EGD, GDE, DEG sono uguali tra loro; poichè gli angoli alla base de' triangoli isosceli sono tra loro uguali [5.I.]. Ma i

tre angoli di ogni triangolo sono uguali a due retti [32. I.]; adunque l' angolo EGD è la terza parte di due retti: e similmente dimostreremo che DGC sia la terza parte di due retti. E poichè la linea retta CG insistendo sopra l' altra EB forma gli adjacenti angoli EGC, CGB uguali a due retti, sarà anche il rimanente angolo CGB la terza parte di due retti: quindi gli angoli EGD, DGC, CGB sono uguali tra loro. Ma gli altri angoli BGA, AGF, FGE sono uguali respettivamente ai loro angoli verticali EGD, DGC, CGB [15. I.]; perciò i sei angoli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE sono uguali tra loro. Or angoli uguali insistono sopra archi uguali [26. III.]; quindi i sei archi AB, BC, CD, DE, EF, FA sono anche tra loro uguali. E perchè archi uguali sono sottesi da linee rette uguali [29. III.]; perciò anche le sei linee rette sono uguali tra loro: laonde l' esagono ABCDEF è equilatero.

Dico in oltre, che sia equiangolo. Imperocchè essendo l' arco AF uguale all' arco ED, se vi si aggiunga di comune l'arco ABCD, sarà tutto l'arco FABCD uguale a tutto l'altro EDCBA: ma sull' arco FABCD insiste l' angolo FED, e sull' altro arco EDCBA sta l' angolo AFE; adunque l' angolo FED è uguale all' angolo AFE [27. III.]. Similmente si dimostrerà ciascuno de' rimanenti angoli dell' esagono ABCDEF uguale all' uno e l' altro angolo AFE, FED; perciò l'esagono ABCDEF è equiangolo: si è dimostrato anche equilatero, ed è inscritto nel cerchio ABCDEF.

Quindi si è inscritto in un cerchio dato un esagono equilatero, ed equiangolo *ec.* — *C.B.F.* [*V.N.*]

COROLLARIO

È chiaro da ciò, che il dato dell' esagono sia uguale al raggio del cerchio in cui è inscritto.

E se per gli punti A, B, C, D, E, F si tirino le tangenti al cerchio, si circonscriverà ad esso l' esagono equilatero, ed equiangolo; il che potrà dimostrarsi, come si è fatto per lo pentagono. Ed in oltre, similmente che per lo pentagono, s' inscriverà

in un dato esagono equilatero, ed equiangolo il cerchio, o gli si circonscriverà.

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA.

Inscrivere in un cerchio dato un quindegagono equilatero, ed equiangolo.

Sia dato il cerchio ABCD [*fig.* 114.]: fa d' uopo inscrivere in esso un quindegagono equilatero, ed equiangolo.

Adattisi nel cerchio ABCD il lato AC del triangolo equilatero inscritto in esso [2. IV.], ed il lato AB del pentagono equilatero, ed equiangolo [11. IV.]. É chiaro che delle quindici parti nelle quali si vuol dividere l' intera circonferenza ABCD, ne dovrà contenere cinque l' arco ABC, ch' è la terza parte della circonferenza, e tre l' altro arco AB, che n' è la quinta parte; e quindi il rimanente arco BC ne conterrà due. Si divida AC per metà in E, sarà sì l' arco BE, che l' altro EC la quindicesima parte dell' intera circonferenza ABCD; e perciò se si adatteranno nel cerchio successivamente linee rette ugnali alle congiungenti BE, EC, si sarà inscritto in esso il quindegagono equilatero, ed equiangolo *ec.* — *C.B.F.*[*V.N.*]

Seguendo il metodo stesso tenuto per lo pentagono; se per gli punti delle divisioni della circonferenza si tirino le tangenti al cerchio, gli si circonscriverà il quindegagono equilatero, ed equiangolo. E di più si potrà nel modo stesso in un dato quindegagono equilatero, ed equiangolo inscrivere il cerchio, o circonscrivergliclo.

FINE DEL QUARTO LIBRO.

IL QUINTO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE.

DEFINIZIONI.

I. Una grandezza minore è *parte* di un'altra grandezza maggiore, quando la minore misura la maggiore, » cioè quando la » minore si contiene un certo numero di volte esattamente nella maggiore.

II. Una grandezza maggiore è *multiplice* di un'altra minore, quando la maggiore è misurata dalla minore, cioè quando la » maggiore contiene un certo numero di volte esattamente la mi» nore.

III. La *ragione* è un certo rapporto scambievole di due grandezze dello stesso genere, per quanto si appartiene alla quantità. [*V.N.*].

IV. Quelle grandezze diconsi aver ragione fra loro, delle quali la minore multiplicata, cioè presa più volte, può supera» re la maggiore. » Tali grandezze si chiamano *omogenee*.

V. Si dicono essere nella stessa ragione le grandezze, la prima alla seconda, e la terza alla quarta; quando gli ugualmente multiplici della prima e della terza, presi secondo qualunque multiplicità, o insieme superino, o insieme pareggino, o insie-

me sieno minori degli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta, presi anche secondo qualunque multiplicità. [*V.N*]

VI. Le grandezze, che hanno la stessa ragione si dicano *proporzionali*.

N B. Ordinariamente per dinotare che quattro grandezze sono proporzionali, si usa dire, che la *prima sta alla seconda*, *come la terza alla quarta*.

VII. Quando poi di quelli ugualmente multiplici[*def.*5.V.], il multiplice della prima superasse quello della seconda; ma l'ugualmente multiplice della terza non superasse quello della quarta: allora si dice aver la prima alla seconda maggior ragione, che la terza alla quarta.

VIII. La *proporzione*, o *analogia* è la similitudine, cioè l'ugaglianza delle ragioni.

IX. La proporzione consiste al meno in tre termini.

X. Quando tre grandezze sono proporzionali, la prima dicesi avere alla terza ragion *duplicata* di quella, che ha alla seconda.

XI. Quando poi sono continuamente proporzionali quattro grandezze, la prima si dice avere alla quarta *triplicata* ragione di quella, che ha alla seconda: e così *quadruplicata*, se il numero delle grandezze continuamente proporzionali fosse cinque, ec., dando sempre denominazione alla ragione della prima all'ultima, per un'unità meno del numero delle quantità proporzionali.

Def. A. Se vi sieno quante grandezze si vogliano del genere stesso, la prima si dice avere all'ultima *ragion composta* dalla ragione, che ha la prima alla seconda, da quella, che ha seconda alla terza, e dall'altra, che la terza ha alla quarta, e così successivamente sino all'ultima [*V.N.*].

Per esempio, sieno le grandezze omogenee A, B, C, D, la prima A si dice avere all'ultima D *ragion composta* dalla ragione di essa A a B, dalla ragione di B a C, e dalla ragione di C e D; o pure la ragione di A a D si dice composta dalle ragioni di A a B, di B a C, e di C a D.

Quindi se la ragione di A a B sia la stessa, che quella di E ad F; la ragione di B a C sia la stessa, che l'altra di

G ad H, e la ragione di C a D la stessa, che quella di K ad L; si dice A avere a D ragione composta dalle ragioni, che sono le stesse, che quelle di E ad F, di G ad H, e di K ad L. E lo stesso s' intende, quando per brevità si dice, che A ha a D ragion composta dalle ragioni di E ad F, di G ad H, e di K ad L.

E se la ragione di M ad N sia la stessa, che quella di A a D, poste le medesime cose dette poc' anzi, per brevità si dice, che la ragione di M ad N sia composta dalle ragioni di E ad F, di G ad H, e di K ad L.

XII. Si dicono grandezze *omologhe* in una proporzione, gli antecedenti tra loro, ed i conseguenti tra loro.

N. B Colle seguenti voci, si dinotano dagli antichi Geometri alcune maniere di mutare, o l' ordine, o la grandezza de' termini di una, o di due ragioni.

XIII. La *permutazione di ragioni*, o *permutando*, è quando in due ragioni, i termini delle quali sieno tutti omogenei, si paragona l' antecedente dell' una all' antecedente dell' altra, ed il conseguente di quella al conseguente di questa. [*V.N.*].

XIV. La *ragione inversa*, o *invertendo*, è il prendere il conseguente come antecedente, e paragonarlo all' antecedente come conseguente.

XV. La *composizione di ragione*, o *componendo*, è il paragone dell' antecedente e del conseguente, insieme presi, allo stesso conseguente.

XVI. La *divisione di ragione*, o *dividendo*, è quando si prende l' eccesso dell' antecedente sul conseguente, e si paragona allo stesso conseguente.

XVII. La *conversione di ragione*, o *convertendo*, è quando si paragona l' antecedente al suo eccesso sul conseguente.

XVIII. Se vi sieno più grandezze omogenee da una parte, ed altrettante anche omogenee tra loro dall' altra, e le ragioni de' termini prossimi delle prime sieno uguali respettivamente alle ragioni de' termini prossimi delle seconde; il paragone de' primi termini di esse agli ultimi corrispondenti si dirà *per equalità*. [*V.N.*].

N. B. Un tal paragone si suol anche dire *ex aequo*, o *ex aequali*.

XIX. La *proporzione ordinata* è quando sieno più grandezze omogenee da una parte, ed altrettante anche omogenee tra loro dall'altra; e stia la prima alla seconda nelle prime grandezze, come nelle altre la prima alla seconda, come poi, nelle prime, la seconda alla terza, e sì nelle altre la seconda alla terza, e così successivamente. [*V.N.*].

XX. La *proporzione perturbata* è quando vi sieno più grandezze omogenee da una parte, ed altrettante anche tra loro omogenee dall' altra, e sia la prima alla seconda nelle prime grandezze, come la penultima all' ultima nelle seconde; come poi, nelle prime, la seconda alla terza, così nelle seconde, l' antipenultima alla penultima, e così successivamente. [*V.N.*].

POSTULATO.

Concedasi, che date due grandezze omogenee, qual ragione ha la prima grandezza alla seconda, tale possa avere la seconda ad una terza a quelle omogenea; o pure, che tale possa concepirsi averla una terza di qualunque genere ad un'altra quarta a se omogenea. [*V.N.*].

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno ugualmente multiplici di altrettante, ciascuna di ciascuna; quante volte è multiplice una grandezza di una, tante volte saranno multiplici ancor tutte di tutte.

Sieno quante grandezze si vogliano AB, CD [*fig.* 115.], ugualmente multiplici di altrettante grandezze E, F, ciascuna di ciascuna: dico che quante volte AB è multiplice di E, tante volte le AB, CD insieme sieno multiplici delle E, F insieme.

Perciocchè essendo AB ugualmente multiplice della E, che la CD della F; quante grandezze sono nella AB uguali alla E, altrettante saranno nella CD uguali alla F: si divida la AB in parti uguali alla E, che sieno AG, GB, e la CD si divida pure in parti uguali alla F, cioè CH, HD; sarà il numero delle parti CH, HD uguale al numero delle altre AG, GB. E poichè la AG è uguale alla E, e la CH alla F, saranno anche le AG, CH insieme uguali alle E, F insieme; e per la medesima ragione essendo GB uguale ad E, ed HD uguale ad F, saranno anche GB, HD insieme, uguali ad E, F insieme; e perciò quante parti sono nella AB uguali alla E, tante ne saranno nelle AB, CD insieme uguali alle E, F insieme: onde quante volte è la AB multiplice della E, tante volte multiplici saranno le AB, CD insieme delle E, F insieme.

Se dunque quante grandezze si vogliano *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se la prima sia tanto multiplice della seconda, quanto la terza della quarta; e sia la quinta tanto multiplice della seconda, quanto la sesta della quarta; sarà ancor la prima insieme con la quinta tanto multiplice della seconda, quanto la terza insieme con la sesta è multiplice della quarta.

La prima AB [*fig.* 116.] sia tanto multiplice della seconda C, quanto la terza DE della quarta F; sia poi la quinta BG tanto multiplice della seconda C, quanto la sesta EH della quarta F: dico che la prima insieme con la quinta, cioè AG, sia tanto multiplice della seconda C, quanto è multiplice la terza insieme colla sesta, cioè DH, della quarta F.

Poichè AB è tanto multiplice di C, quanto DE di F; quante grandezze uguali a C sono in AB, altrettante uguali ad F

saranno in DE: per la stessa ragione, quante ne sono in BG uguali a C, tante ne saranno in EH uguali ad F. Quindi quante ne sono in tutta AG uguali a C, altrettante ne saranno in tutta DH uguali ad F; e perciò quanto AG è multiplice di C, altrettanto DH lo è di F. Laonde la prima insieme colla quinta, cioè AG, sarà tanto multiplice della seconda C, quanto la terza insieme colla sesta, cioè DH, è multiplice della quarta F.

Se dunque la prima sia tanto multiplice *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se la prima sia tanto multiplice della seconda, quanto la terza della quarta; e prendansi gli ugualmente multiplici della prima, e della terza; questi saranno anche ugualmente multiplici l'uno della seconda, e l'altro della quarta.

Sia la prima A [*fig.* 117.] tanto multiplice della seconda B, quanto la terza C della quarta D; e prendansi di A, e di C gli ugualmente multiplici EF, e GH: dico, che debba anche EF essere tanto multiplice di B, quanto GH di D.

Poichè EF è tanto multiplice di A, quanto GH di C; quante grandezze sono in EF uguali ad A, tante ne saranno in GH uguali a C: dividasi perciò EF nelle grandezze EK, KF uguali ad A, e GH si divida pure nelle grandezze GL, LH uguali a C; sarà il numero delle EK, KF uguale a quello delle GL, LH. Ed essendo A tanto multiplice di B, quanto C di D; ed EK uguale ad A, GL a C; sarà EK tanto multiplice di B, quanto HL di D. Per la stessa ragione sarà KF tanto multiplice di B, quanto LH di D. Perchè dunque la prima EK è tanto multiplice della seconda B, quanto la terza GL della quarta D, e la quinta KF è tanto multiplice della secon-

da B, quanto la sesta LH della quarta D; sarà la prima insieme colla quinta, cioè EF, tanto multiplice della seconda B, quanto la terza insieme colla sesta, cioè GH, è multiplice della quarta D [2. V.].

E perciò se la prima sia tanto multiplice *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se la prima di quattro grandezze abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; anche gli ugualmente multiplici della prima, e della terza avranno la stessa ragione agli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta, secondo qualunque multiplicità si prendano, se quelli si paragonino a questi.

La prima A [*fig.* 118.] abbia alla seconda B la stessa ragione, che la terza C alla quarta D; e prendansi delle A, C gli ugualmente multiplici qualunque E, F; e di B, D gli altri qualsivogliano ugualmente multiplici G, H: dico che E stia a G, come F ad H.

Si prendano ancora di E, F gli altri ugualmente multiplici K, L; e similmente di G, H gli altri qualunque ugualmente multiplici M, N. Or poichè E è tanto multiplice di A, quanto F di C; e si sono presi di E, F gli ugualmente multiplici K, L, sarà K tanto multiplice di A, quanto L di C [3. V.]. Per la stessa ragione M sarà tanto multiplice di B, quanto N di D. Ed essendo A a B, come C a D; e si sono presi di A, C gli ugualmente multiplici K, L, e di B, D gli altri ugualmente multiplici qualunque M, N, ne segue, che se K supererà M, anche L supererà N; se è uguale, sarà uguale; e se minore, minore. Ma sono K, L ugualmente multiplici di E, F; ed M,

N sono ugualmente multiplici qualunque di G , H : adunque come E a G , così starà F ad H [*def.* 5. V.].

E quindi se la prima abbia alla seconda *ec.* — *C.B.D.*[*V.N.*].

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se una grandezza sia tanto multiplice di un' altra grandezza , quanto la tolta dalla prima è multiplice della tolta dalla seconda ; anche la rimanente sarà tanto multiplice della rimanente , quanto tutta di tutta.

La grandezza AB [*fig.* 119.] sia tanto multiplice della grandezza CD , quanto AE tolta dall' una l' è di CF tolta dall' altra : dico che la rimanente EB sia tanto multiplice della rimanente FD , quanto tutta AB di tutta CD.

Si ponga EB tanto multiplice di CG , quanto AE è multiplice di CF. E poichè AE è tanto multiplice di CF, quanto EB di CG ; sarà AE tanto multiplice di CF , quanto AB di GF [1. V.]. Ma si è supposto essere AE tanto multiplice di CF , quanto AB di CD ; adunque AB è ugualmente multiplice dell' una e dell' altra GF, DC ; e perciò GF è uguale a CD, se ne tolga di comune CF , e sarà la rimanente CG uguale alla rimanente FD. Per la qual cosa essendo AE tanto multiplice di CF , quanto EB di CG , e CG è uguale a DF ; sarà AE tanto multiplice di CF , quanto EB di FD. Ma si è supposto AE tanto multiplice di CF , quanto AB di CD ; adunque EB sarà tanto multiplice di FD , quanto AB di CD.

E perciò se una grandezza sia tanto multiplice *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*].

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due grandezze sieno ugualmente multiplici di due altre; e da quelle sien tolte due altre grandezze ugualmente multiplici di queste, saranno le rimanenti o uguali a queste stesse, o ugualmente multiplici di esse.

Le due grandezze AB, CD [*fig.* 120.] sieno ugualmente multiplici delle altre due E, F e di queste stesse ne sieno anche ugualmente multiplici le AG, CH, che si tolgono da quelle: dico che le rimanenti GB, HD o sieno uguali alle E, F, o ugualmente multiplici di esse.

Sia primieramente GB un multiplice di E: dico che ancora HD sia un ugualmente multiplice di F.

Si ponga CK tanto multiplice di F, quanto GB lo è di E. E poichè AG è tanto multiplice di E, quanto CH di F; ed è pure GB tanto multiplice di E, quanto CK di F; sarà AB tanto multiplice di E, quanto KH di F [2. V.]. Ma si è supposto AB tanto multiplice di E, quanto CD di F; adunque KH è tanto multiplice di F, quanto CD dell' istessa F. Laonde essendo ciascuna delle KH, CD ugualmente multiplice della stessa F; dovrà KH essere uguale a CD; si tolga di comune CH; sarà la rimanente KC uguale alla rimanente HD: ma KC è tanto multiplice di F, quanto GB lo è di E; adunque anche HD sarà tanto multiplice di F, quanto GB lo è di E. Similmente dimostreremo, che se GB fosse uguale ad E, anche HD sarebbe uguale ad F.

Perciò se due grandezze sieno ugualmente multiplici, *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*].

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Le grandezze uguali hanno la stessa ragione ad una medesima grandezza: e questa medesima ha la stessa ragione alle grandezze uguali.

Sieno le grandezze uguali A, B [*fig.* 121.], ed un altra qualunque C: dico che ciascuna delle A, B abbia a C la stessa ragione; e che C abbia a ciascuna delle A, B la stessa ragione.

Si prendano di A, B gli ugualmente multiplici D, E, e di C un qualunque altro multiplice F. E poichè D è tanto multiplice di A quanto E di B, ed è A uguale a B; sarà anche D uguale ad E: ma è poi F un' altra grandezza qualunque; adunque se D supera F, anche E supererà F; e se è uguale, sarà uguale; se minore, minore: sono poi D, E ugualmente multiplici di A, B, ed F è un qualunque altro multiplice di C; adunque sarà come A a C, così B a C [*def.*5.V.].

Dico in oltre, che C serbi la medesima ragione a ciascuna delle A, B.

Poichè, fatto lo stesso apparecchio, dimostreremo similmente che D sia uguale ad E: è poi F un'altra grandezza qualunque; adunque se F supera D, supererà anche E; e se è uguale, sarà uguale; se minore, minore. Ma è F un multiplice di C, e D ed E sono qualunque altri ugualmente multiplici di A, B; adunque C starà ad A, come C a B [*def.* 5. V.].

E perciò le grandezze uguali cc. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Delle grandezze disuguali la maggiore ha ad una stessa maggior ragione, che la minore: e questa stessa ha alla minore maggior ragione, che alla maggiore.

Sieno le grandezze disuguali AB, BC [*fig.* 122.], ed AB sia la maggiore, ed un altra D sia comunque: dico che AB abbia a D maggior ragione, che BC a D: e che D abbia a BC maggior ragione che ad AB.

Se delle AC, CB quella ch'è più piccola sia minore di D, essa, o che sia AC o pur CB, multiplicata potrà divenire una volta maggiore di D [*def.* 4.V.]. Si multiplichi, finchè diventi maggiore di D; e quante volte l' una si è multiplicata, tante volte si multiplichi l' altra, e sia EF un tal multiplice di AC che superi D, FG poi l' ugualmente multiplice di CB; sarà quindi tanto EF, quanto FG maggiore di D. Se poi sì BC che CA sia maggiore di D, basterà prendere qualsivogliano ugualmente multiplici di esse. In ciascuno di questi casi, si prenda di D il doppio H, il triplo K, e così successivamente, fintantochè si abbia quel multiplice di D, ch'è il primo a superare FG: sia questo L; e dinoti K quell' altro multiplice della stessa D, ch'è prossimamente minore di L.

E poichè L è il multiplice di D, ch'è il primo a superare FG, non sarà K maggiore di FG; e quindi FG non sarà minore di K. Ed essendo EF tanto multiplice di AC, quanto FG di CB; sarà anche FG tanto multiplice di CB quanto EG di AB [1. V.], onde EG, FG sono ugualmente multiplici di AB, CB: ma FG si è dimostrata non minore di K, e per costruzione EF supera D; quindi l' intera EG supererà K e D insieme. Sono poi K e D insieme uguali ad L; adunque EG supera L, ed FG non supera la stessa L: ed EG, FG sono

ugualmente multiplici di AB , BC , ed L è un certo multiplice di D; adunque AB ha a D maggior ragione, che BC a D [*def.* 7 V.].

In oltre D a BC avrà maggior ragione, che D ad AB. Poichè, fatta la stessa costruzione, si dimostrerà similmente, che L superi FG, ma che non superi EG: è poi L un multiplice di D, ed FG, EG sono alcuni altri ugualmente multiplici di CB, AB ; adunque sarà D a CB in maggior ragione di D ad AB [*def.* 7. V.]

Quindi delle grandezze disuguali *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*].

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Quelle grandezze , che hanno ad una medesima la stessa ragione , sono uguali tra loro : e quelle alle quali una medesima ha la stessa ragione , sono ancora tra loro uguali.

Abbia ciascuna delle A, B [*fig.* 123.], la stessa ragione a C : dico che A sia uguale a B.

Poichè se A non è uguale a B , ciascuna di esse non avrà la stessa ragione a C [8. V.] : ma glie l'ha ; adunque A è uguale a B.

Similmente abbia C a ciascuna delle A , B la stessa ragione: dico che A sia uguale a B.

Poichè se non è così , non avrà C la stessa ragione a ciascuna delle A, B [8. V.]: ma glie l'ha ; adunque A è uguale a B.

E perciò le grandezze *ec.* — *C. B. D.* [*V.N.*]

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Delle grandezze che hanno ragione ad una medesima, quella che ha a questa maggior ragione è la maggiore: ed è minore poi quella, alla quale questa medema ha maggior ragione.

Abbia A a C maggior ragione di B a C [*fig.* 124.]: dico che A sia maggiore di B.

Perciocchè se non è maggiore, o è uguale o minore. Or non è A uguale a B; poichè ciascuna delle A, B avrebbe la medesima ragione a C [7. V.]: ma non l' hanno; adunque A non è uguale a B. Nè tampoco A è minore di B; poichè A avrebbe a C minor ragione che B [8. V.]: ma non l' ha minore; perciò A non è minore di B. Si è anche dimostrato che non è uguale: adunque A sarà maggiore di B.

Similmente abbia C a B maggior ragione, che C ad A: dico che B sia minore di A.

Poichè se B non è minore di A, o è uguale o maggiore. Ma non è B uguale ad A; perchè allora C avrebbe ad A la stessa ragione, che a B [7. V.]: e non l' ha; adunque A non è uguale a B. Nè tampoco B è maggiore di A; poichè avrebbe C a B minor ragione che ad A [8.V.]: e non l' ha; adunque B non è maggiore di A. Si è dimostrato che nè pure era uguale; quindi B sarà minore di A.

E perciò delle grandezze, *ec.* — *C. B. D.* [*V. N.*]

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Quelle ragioni che sono uguali ad una medesima ragione, sono uguali anche tra loro.

Sia come A a B [*fig.* 125.], così C a D; e come C a D, così E ad F: dico, che come A a B, così stia E ad F.

Si prendano di A, C, E gli ugualmente multiplici G, H, K; come pure di B, D, F gli altri ugualmente multiplici qualunque L, M, N. E poichè A sta a B, come C a D; e si sono presi di A, C gli ugualmente multiplici G, H; e di B, D gli altri ugualmente multiplici qualunque L, M; perciò se G supera L, anche H supererà M; e se è uguale, sarà uguale; se minore, minore [*def.* 5.V.]. Similmente poichè C sta a D, come E ad F; e si sono presi di C, E gli ugualmente multiplici H, K; e di D, F gli altri ugualmente multiplici qualunque M, N: perciò se H supera M, anche K supererà N; se è uguale, sarà uguale; e se minore, minore [*def.* 5. V.]. Or se H supera M, si è dimostrato che anche G supera L; e se è uguale, uguale; se minore, minore. Adunque se G superi L, K supererà N; e se è uguale, sarà uguale; se minore, minore. Sono poi G, K ugualmente multiplici di A, E; ed L, N sono altri ugualmente multiplici qualunque, di B, F. Quindi come sta A a B, così starà E ad F [*def.* 5. V.].

E perciò le ragioni, *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno proporzionali, come sta una delle antecedenti di esse alla sua conseguente, così staranno tutte le antecedenti a tutte le conseguenti.

Sieno quante grandezze si vogliano proporzionali A, B, C, D, E, F [*fig.* 126.]; e come A a B, così stia C a D, ed E ad F: dico che come A a B, così stieno A, C, E insieme a B, D, F insieme.

Si prendano di A, C, E gli ugualmente multiplici G, H, K; e di B, D, F gli altri ugualmente multiplici qualunque L, M, N. E poichè come A a B, così sta C a D, ed E ad F, e si sono presi di A, C, E gli ugualmente multiplici G, H, K; e di B, D, F gli altri qualunque ugualmente multiplici L, M, N; perciò se G supera L, H supererà M, e K, N; se G è uguale ad L, anche H e K saranno respettivamente uguali ad M ed N; e se minore, minori [*def.* 5. V.]. Per la qual cosa se G supera L, anche G, H, K dovranno superare L, M, N; e se è uguale, saranno uguali; se minore, minori: sono poi G, e G, H, K ugualmente multiplici di A, e di A, C, E; poichè se vi sieno quante grandezze si vogliano ugualmente multiplici di altrettante, ciascuna di ciascuna; quanto una è multiplice di una, tanto tutte lo sono di tutte [1. V.]: e per la medesima ragione anche L ed L, M, N sono ugualmente multiplici di B e di B, D, F. Quindi come A a B, così dovranno stare A, C, E insieme, a B, D, F insieme [*def.* 5. V.].

Dunque se quante grandezze *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione che la terza alla quarta, e la terza abbia alla quarta maggior ragione che la quinta alla sesta: anche la prima avrà alla seconda maggior ragione che la quinta alla sesta.

La prima A [*fig.* 127.] abbia alla seconda B la stessa ragione, che la terza C alla quarta D, ed abbia la terza C alla quarta D maggior ragione, che la quinta E alla sesta F: dico che ancora la prima A abbia alla seconda B maggior ragione, che la quinta E alla sesta F.

Poichè C ha a D maggior ragione, che E ad F, vi saranno tali ugualmente multiplici di esse C, E, e tali altri di D, F, che il multiplice di C superi quello di D; ma l'ugualmente multiplice di E non superi quello di F [*def.* 7. V.]. Prendansi, e sieno di C, E gli ugualmente multiplici G, H; e di D, F gli altri K, L, dimodochè G superi K, ma H non superi L: poi quanto G è multiplice di C, tanto si faccia M multiplice di A; e quanto K è multiplice di D, tanto si faccia N multiplice di B. E poichè A sta a B, come C a D, e si sono presi di A, C gli ugualmente multiplici M, G; e di B, D gli altri ugualmente multiplici N, K: perciò se M supera N, G supererà K, e se è uguale, sarà uguale; se minore, minore [*def.* 5. V.]. Ma G supera K; adunque anche M supererà N; H poi non supera L; e sono M, H ugualmente multiplici di A, E, ed N, L sono pure altri ugualmente multiplici di B, F: adunque A avrà a B maggior ragione, che E ad F [*def.* 7. V.].

E perciò se la prima ec. — *C. B. D.*

COROLLARIO

E se la prima abbia alla seconda maggior ragione, che la terza alla quarta; la terza poi abbia alla quarta la stessa ragione, che la quinta alla sesta; si dimostrerà similmente, che la prima debba avere alla seconda maggior ragione, che la quinta alla sesta. [*V.N.*]

PROPOSIZIONE A.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; e la prima sia maggiore della seconda, anche la terza sarà maggiore della quarta; e se uguale uguale; se minore, minore.

La prima A [*fig.* 130.] abbia alla seconda B la stessa ragione, che la terza C alla quarta D: dico che se A è maggiore di B, anche C sia maggiore di D; e se uguale, uguale; se minore, minore.

Imperocchè prendansi di A, B, C, D gli stessi ugualmente multiplici qualsivogliano, per esempio i doppj, e sieno respettivamente E, F, G, H. E perchè A sta a B, come C a D, gli ugualmente multiplici E, G di A, C si dovranno accordare, o in superare, o in essere uguali, o minori degli ugualmente multiplici F, H di B, D [*def.* 5. V.]: che perciò è chiaro, che anche le grandezze A, C, che sono le metà respettivamente di E, G dovranno accordarsi, o in superare, o in essere uguali, o minori delle B, D, che sono le metà delle F, H.

Adunque se la prima *ec.* — *C. B. D.* [*V. N.*].

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta, e queste quattro grandezze sieno dello stesso genere, e la prima sia maggiore della terza, anche la seconda sarà maggiore della quarta; e se uguale, uguale; se minore, minore.

La prima A [*fig.* 128.] abbia alla seconda B la stessa ragione, che la terza C alla quarta D; e sia A maggiore di C: dico che anche B sia maggiore di D.

Poichè A è maggiore di C, e B è un' altra grandezza qualunque; avrà A a B maggior ragione, che C a B [8. V.]: ma come A a B, così sta C a D; adunque C avrà a D maggior ragione, che C a B [13. V.]. Or quella grandezza alla quale una stessa ha maggior ragione, è minore [10. V.]: quindi D è minore di B; e perciò B sarà maggiore di D.

Sia in secondo luogo A uguale a C: dico che B sia uguale a D.

Poichè essendo A a B, come C, o sia A a D, sarà B uguale a D [9. V.].

Finalmente se A sia minore di C, sarà anche B minore di D.

Imperocchè sarà C maggiore di A; e perciò essendo C a D, come A a B, si dimostrerà, come nel caso primo, che D sia maggiore di B, cioè B minore di D.

Quindi se la prima abbia alla seconda *ec.* — *C. B. D.* [*V. N.*].

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Le grandezze hanno l' una all' altra la medesima ragione, che serbansi i loro ugualmente multiplici.

Sia AB tanto multiplice di C [*fig.* 129.], quanto DE di F: dico che come C ad F, così stia AB a DE.

Poichè AB è tanto multiplice di C, quanto DE di F; quante grandezze sono in AB uguali a C, altrettante ne saranno in DE uguali ad F. Dividasi perciò AB in grandezze uguali a C, le quali sieno AG, GH, HB; e DE si divida pure in grandezze uguali ad F, cioè in DK, KL, LE; sarà il numero delle AG, GH, HB uguale al numero delle DK, KL, LE. Or poichè sono uguali le AG, GH, HB, come pure sono tra loro uguali le DK, KL, LE; sarà come AG a DK, così GH a KL, ed HB ad LE: e perciò sarà anche, come una delle antecedenti alla sua conseguente, così tutte le antecedenti insieme a tutte le conseguenti insieme [12. V.]. Adunque come AG a DK, così sta AB a DE: ma AG è uguale a C, e DK ad F; quindi come C ad F, così starà AB a DE.

E perciò le grandezze hanno l' una all' altra *ec.*— *C.B.D.*

PROPOSIZIONE B.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; e la prima sia un multiplice della terza, anche la seconda sarà un ugualmente multiplice della quarta.

La prima AB [*fig.* 129.] stia alla seconda ED nella

stessa ragione, che la terza C alla quarta F; e sia AB multiplice di C: dico che ED debba essere un ugualmente multiplice di F.

Imperocchè se si supponga essere ED tanto multiplice di un' altra grandezza P, per quanto l'è BA di C; dovrà stare BA ad ED, come C a P [15. V.]: ma si è supposto BA ad ED, come C ad F. Adunque sarà C a P, come C ad F [11.V.]; e perciò P uguale ad F [9. V.]. Per lo che, essendosi supposto esser ED tanto multiplice di P, per quanto l'è AB di C; sarà pure ED tanto multiplice di F, per quanto l'è AB di C. Laonde se la prima abbia alla seconda *ec.*—*C.B.D.* [*V.N.*]

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se quattro grandezze omogenee sieno proporzionali, permutando saranno anche proporzionali.

Sieno proporzionali le quattro grandezze omogenee A, B, C, D [*fig.* 130], e sia come A a B, così C a D: dico che permutando sieno anche proporzionali, cioè che stia A a C, come B a D.

Poichè prendansi di A, B gli ugualmente multiplici E, F; e di C, D gli altri ugualmente multiplici qualunque G, H. E perchè E è tanto multiplice di A, quanto F di B; e le grandezze hanno l'una all'altra la medesima ragione, che serbansi i loro ugualmente multiplici [15. V.]; perciò sarà A a B, come E ad F. Ma come A a B, così sta C a D; adunque come C a D, così sta E ad F [11. V.]. Similmente poichè G, H sono ugualmente multiplici di C, D; sarà pure C a D, come G ad H [15. V.]. Ma come C a D, così sta E ad F: onde E sta ad F, come G ad H [11.V.]. Or se quattro grandezze sono proporzionali, e la prima sia maggiore della terza, la seconda sarà maggiore della quarta; e se uguale, uguale; se minore, minore [14.V.]: perciò se E è maggio-

re di G, anche F sarà maggiore di H; e se uguale, uguale; se minore, minore. Ma E, F sono ugualmente multiplici di A, B, e G, H sono anche qualunque altri ugualmente multiplici di C, D. Adunque A starà a C, come B a D [*def.* 5. V.].

Quindi se quattro grandezze ec. — *C. B. D.* [*V. N.*].

PROPOSIZIONE C.

TEOREMA.

Se quattro grandezze sieno proporzionali, invertendo saranno anche proporzionali.

Sia A a B [*fig.* 130.], come C a D: dico che invertendo debba stare B ad A, come D a C.

Imperocchè si prendano di B, D gli ugualmente multiplici qualunque F, H, e di A, C gli altri ugualmente multiplici E, G. E perchè A sta a B, come C a D; dovranno gli ugualmente multiplici E, G di A, C accordarsi in superare, o in essere uguali, o minori degli ugualmente multiplici F, H di B, D [*def.* 5. V.]. Adunque gli ugualmente multiplici F, H di B, D si accorderanno, o in esser minori, o uguali, o in superare gli ugualmente multiplici E, G di A, C; e perciò dovrà stare B ad A, come D a C [*def.* 5. V.].

Quindi se quattro grandezze ec. — *C. B. D.* [*V. N.*].

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se le grandezze composte sieno proporzionali, dividendo saranno anche proporzionali.

Sieno proporzionali le grandezze composte AB, BE, CD,

DF [*fig.* 131.], e sia come AB a BE, così CD a DF: dico che dividendo sieno anche proporzionali, cioè che stia AE ad EB, come CF ad FD.

Si prendano di AE, EB, CF, FD gli ugualmente multiplici GH, HK, LM, MN; e similmente di EB, FD gli altri ugualmente multiplici qualunque KX, NP. E poichè GH è tanto multiplice di AE, quanto HK di EB, sarà GH tanto multiplice di AE, quanto GK di AB [1. V.]: è poi GH tanto multiplice di AE, quanto LM di CF: adunque GK è tanto multiplice di AB, quanto LM di CF. Similmente poichè LM è tanto multiplice di CF, quanto MN di FD; sarà LM tanto multiplice di CF, quanto LN di CD [1. V.]: ma era LM tanto multiplice di CF, quanto GK di AB; adunque GK è tanto multiplice di AB, quanto LN di CD; e perciò sono GK, LN ugualmente multiplici di AB, CD.

Or essendo HK tanto multiplice di EB, quanto MN di FD, ed è poi KX tanto multiplice della stessa EB, quanto NP della stessa FD: perciò anche la composta HX sarà tanto multiplice di EB, quanto la composta MP è multiplice di FD [2.V.]. Per la qual cosa essendo AB a BE, come CD a DF; ed essendosi presi di AB, CD gli ugualmente multiplici GK, LN, e di EB, FD gli altri ugualmente multiplici qualunque HX, MP: se GK supera HX, anche LN supererà MP; e se uguale, uguale; se minore, minore [*def.* 5. V.]. Adunque GK superi HX: toltone di comune HK; anche GH supererà KX. Ma se GK supera HX, LN supera MP; laonde LN supera MP; e perciò toltone di comune MN, anche LM supererà NP: che perciò se GH supera KX, anche LM supererà NP. Dimostreremo similmente, che se GH sia uguale a KX, LM sia uguale ad NP; e se minore, minore: e sono GH, LM ugualmente multiplici di AE, CF; e KX, NP sono altri ugualmente multiplici qualunque di EB, FD; adunque come AE ad EB, così sarà CF ad FD [*def.* 5. V.].

E perciò se le grandezze composte ec. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se le grandezze divise sieno proporzionali, componendo saranno anche proporzionali.

Sieno proporzionali le grandezze divise AE, EB, CF, FD; [*fig*132.], e come AE ad EB, così stia CF ad FD: dico che componendo sieno anche proporzionali; cioè che stia AB a BE, come CD a DF.

Imperciocchè se non sta AB a BE, come CD a DF: sarà AB a BE, come CD ad una grandezza minore di DF, o ad una maggiore [*post. lib.*V.]. Sia in primo luogo ad una minore, come DG. E poichè come AB a BE, così sta CD a DG; le quantità composte essendo proporzionali, anche dividendo saranno proporzionali [17. V.]; adunque come AE ad EB, così sta CG a GD. Ma si è supposto essere AE ad EB, come CF ad FD; perciò come CG a GD, così sta CF ad FD [11. V.] Or queste grandezze sono dello stesso genere, e la prima CG è maggiore della terza CF; onde anche la seconda DG sarà maggiore della quarta DF [14. V.]: ma è minore, che è impossibile. Quindi non sta AB a BE, come CD a DG minore di DF. Similmente dimostreremo, che non può stare AB a BE, come CD ad una grandezza maggiore di DF; perciò necessariamente dovrà stare AB a BE, come CD a DF.

Adunque se le grandezze divise *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*]

PROPOSIZIONE D.

TEOREMA.

Se le grandezze composte sieno proporzionali, convertendo saranno anche proporzionali.

Sia AB a BE [*fig.* 133.], come CD a DF: dico che convertendo debba stare AB ad AE, come CD a CF.

Imperocchè essendo AB a BE, come CD a DF, dividendo sarà AE ad EB: come CF ad FD [18. V.]; ed invertendo si avrà EB ad AE, come FD a CF [C. V.]: che perciò componendo si avrà BA ad AE, come DC a CF [18. V.].

Adunque se le grandezze composte *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*].

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se sia come tutta a tutta, così qualche grandezza tolta dall' una a qualche grandezza tolta dall' altra; sarà pure la rimanente alla rimanente, come tutta a tutta.

Sia come tutta AB [*fig.* 138.] a tutta CD, così AE che togliesi dalla AB a CF tolta dalla CD: dico che anche la rimanente EB stia alla rimanente FD, come tutta AB a tutta CD.

Poichè come tutta AB a tutta CD, così sta AE a CF; sarà permutando AB ad AE, come CD a CF [16.V.]; ond'è, che convertendo sarà AB a BE, come CD a DF [D. V.]; e di nuovo permutando sarà AB a CD, come BE a DF: cioè

la rimanente EB alla rimanente FD, come tutta AB a tutta CD.

Laonde se tutta stia a tutta *ec.* — *C.B.D.* [*V. N.*].

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Se tre grandezze sieno in proporzione ordinata con tre altre grandezze; e la prima sia maggiore della terza, anche la quarta sarà maggiore della sesta; e se uguale uguale; se minore, minore.

Sieno le tre grandezze A, B C [*fig.* 134.] in proporzione ordinata con le altre tre D, E, F, cioè stia A a B, come D ad E, e B a C, come E ad F; e sia A maggiore di C: dico che ancora D sia maggiore di F; e se uguale, uguale; se minore, minore.

Perciocchè essendo A maggiore di C, e B un' altra grandezza qualunque; e la maggiore avendo alla medesima maggior ragione, che la minore [8. V.]; avrà A a B maggior ragione, che C a B. Ma come D ad E, così sta A a B; adunque anche D avrà ad E maggior ragione, che C a B [13. V.], Ed essendo B a C, come E ad F; sarà invertendo C a B, come F ad E [C. V.]; e perciò essendosi dimostrato, che stia D ad E in maggior ragione di C a B, dovrà anche stare D ad E in maggior ragione di F ad E. Or di due grandezze, che hanno ragione ad una medesima, è maggiore quella, che ha a questa maggior ragione [10. V.]; adunque D è maggiore di F.

Che se A sia uguale a C; sarà anche D uguale ad F.

Poichè essendo A e C uguali, e B un' altra grandezza qualunque; sarà A a B, come C a B [7 V.]. Ma è poi A a B, come D ad E; ed invertendo sta C a B, come F ad E;

onde D sta ad E, come F ad E [11. V.]; e perciò D è uguale ad F [9. V.].

Sia finalmente A minore di C sarà anche D minore di F.

Poichè essendo A minore di C, sarà C maggiore di A. Ma per ipotesi, ed invertendo, C sta a B, come F ad E [C.V.], ed è B ad A, come E a D: adunque, per lo caso primo, essendo C maggiore di A, sarà anche F maggiore di D; e perciò D minore di F.

Quindi se tre grandezze ec. — *C.B.D.* [*V. N.*].

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se tre grandezze sieno in proporzione perturbata con tre altre grandezze; e la prima sia maggiore della terza, anche la quarta sarà maggiore della sesta; e se uguale, uguale; se minore, minore.

Sieno le tre grandezze A, B, C [*fig.* 135.] in proporzione perturbata con le tre altre D, E, F, cioè stia A a B, come E ad F, e B a C, come D ad E; ed A sia maggiore di C: dico che D sarà maggiore di F; e se uguale, uguale; se minore, minore.

Poichè A è maggiore di C, e B è un' altra grandezza; avrà A a B maggior ragione, che C a B [8. V.]. Ma come A a B, così sta E ad F; quindi anche E avrà ad F maggior ragione, che C a B [13. V.]. Ed essendo B a C, come D ad E, sarà invertendo C a B, come E a D [C. V.]: ma si è dimostrato, che E ha ad F maggior ragione, che C a B; adunque avrà pure E ad F maggior ragione, che E a D. [*cor.* 13.V.]. Or quella grandezza è minore, cui una terza ha maggior ragione [10. V.]; adunque F è minore di D; e perciò D sarà maggiore di F.

Sia adesso A uguale a C; sarà anche D uguale ad F.

Imperocchè essendo A uguale a C, e B una terza grandezza; starà A a B, come C a B [7. V.]. Ma A sta a B, come E ad F; e C a B, come E a D; adunque E sta ad F, come E a D [11. V.]; e perciò D è uguale ad F [9. V.].

Sia in terzo luogo A minore di C; sarà anche D minore di F.

Poichè essendo A minore di C, sarà C maggiore di A. Or per ipotesi, ed invertendo, C sta a B, come E a D, e B ad A, come F ad E: ed è C maggiore di A; quindi, per lo caso primo, sarà anche F maggiore di D; e perciò D minore di F.

Se dunque tre grandezze *cc.* — *C. B. D.* [*V. N.*].

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno in proporzione ordinata con altrettante; per equalità saranno ancora proporzionali.

Sieno primieramente le tre grandezze A, B, C [*fig.*136.] in proporzione ordinata con le tre altre D, E, F; cioè sia A a B, come D ad E, e B a C, come E ad F: dico che stia anche A a C, come D ad F.

Si prendano di A, D gli ugualmente multiplici G, H; di B, E gli altri ugualmente multiplici qualunque K, L; ed in oltre di C, F gli ugualmente multiplici qualunque M, N. E poichè A sta a B, come D ad E; e di A, D si sono presi gli ugualmente multiplici qualunque G, H, e di B, E gli altri qualunque ugualmente multiplici K, L; sarà G a K, come H ad L [4. V.]: e per la stessa ragione dovrà stare K ad M, come L ad N. Laonde essendo le tre grandezze G, K, M in ordinata ragione con le altre tre H, L, N; per equalità, se G è maggiore di M, anche

H sarà maggiore di N; e se uguale, uguale; se minore, minore [20. V.]. Ma G, H sono ugualmente multiplici di A, D; ed M, N sono pure altri ugualmente multiplici qualunque di C, F: adunque A starà a C, come D ad F. [*def.* 5. V.].

Di nuovo sieno le quattro grandezze A, B, C, D in proporzione ordinata con le altre quattro E, F, G, H, cioè che A stia a B, come E ad F; B a C, come F a G; e C a D, come G ad H: dovrà stare ancora A a D, come E ad H.

A . B . C . D .
E . F . G . H .

Imperocchè essendo A, B, C tre grandezze in proporzione ordinata con le tre altre E, F, G; per equalità, dovrà stare A a C, come E a G [*dim.prec.*]: ma sta poi C a D, come G ad H; quindi di nuovo le tre grandezze A, C, D sono in ordinata ragione con le tre altre E, G, H; e perciò, per equalità, dovrà stare A a D, come E ad H. E così si continuerebbe a dimostrare se fosse un qualunque numero di grandezze.

Laonde se quante si vogliano grandezze *ec.*—*C.B.D.*[*V.N.*]

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno in proporzione perturbata con altrettante; per equalità saranno proporzionali.

Primieramente sieno le tre grandezze A, B, C [*fig.*137] in proporzione perturbata con le tre altre D, E, F; cioè come A a B, così stia E ad F, e come B a C, così D ad E: dico che come A a C, così stia D ad F.

Imperciocchè si prendano di A, B, D gli ugualmente multiplici G, H, K; e di C, E, F gli altri ugualmente multiplici qualunque L, M, N: ed essendo G, H ugualmente multiplici di A, B; e le grandezze serbandosi l' una

all' altra la stessa ragione, che i loro ugualmente multiplici [15. V.]; sarà A a B, come G ad H: e per la stessa ragione E starà ad F, come M ad N. Ma come A a B, così sta E ad F; adunque anche G sta ad H, come M ad N [11. V.]. Or poichè come B a C, così sta D ad E; e di B, D si sono presi gli ugualmente multiplici H, K; di C, E gli altri ugualmente multiplici qualunque L, M; sarà H ad L, come K ad M. [4. V.] : e si è dimostrato, che come G ad H, così sta M ad N; quindi essendo le tre grandezze G, H, L in proporzione perturbata con le tre altre K, M, N; per equalità, se G è maggiore di L, anche K sarà maggiore di N; se uguale, uguale; e se minore, minore [21. V.]. Ma sono G, K ugualmente multiplici di A, D; ed L, N sono altri ugualmente multiplici qualunque di C, F: adunque come A a C, così sta D ad F [*def.*5.V.].

Di nuovo, sieno le quattro grandezze A, B, C, D in proporzione perturbata con le altre quattro E, F, G, H, cioè stia A a B, come G ad H; B a C, come F a G; e C a D, come E a F: dico che dovrà anche stare A a D, come E ad H.

A . B . C . D
E . F . G . H

Imperocchè essendo A, B, C tre grandezze in proporzione perturbata con le altre tre F, G, H, per equalità, dovrà stare A a C, come F ad H [*dim.prec.*]; ma sta poi C a D, come E ad F: onde di nuovo le tre grandezze A, C, D sono in perturbata proporzione con le tre altre E, F, H; e quindi dovrà stare, per equalità, A a D, come E ad H. E così si continuerebbe a dimostrare se fosse un qualunque numero di grandezze.

Laonde se quante si vogliano grandezze *ec.—C.B.D.[V.N.].*

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; ed abbia poi la quinta alla seconda la stessa ragione, che la sesta alla quarta: anche la prima insieme con la quinta avrà alla seconda la stessa ragione, che la terza insieme con la sesta alla quarta.

La prima AB [*fig.* 138.] abbia alla seconda C la stessa ragione, che la terza DE alla quarta F; ed abbia poi la quinta BG alla seconda C la stessa ragione, che la sesta EH alla quarta F: dico che AG composta dalla prima e dalla quinta abbia pure alla seconda C la stessa ragione, che DH composta dalla terza e dalla sesta alla quarta F.

Poichè BG sta a C, come EH ad F; invertendo sarà C a BG, come F ad EH [C. V.]. Per lo che essendo AB a C, come DE ad F, e C a BG, come F ad EH; sarà, per equalità, AB a BG, come DE ad EH [22. V.]: e perciò essendo proporzionali queste grandezze divise, anche componendo saranno proporzionali [18. V.], cioè sarà AG a GB, come DH ad HE. Ma è poi GB a C, come EH ad F: adunque, di nuovo per equalità, AG starà a C, come DH ad F.

Laonde se la prima abbia alla seconda *ec.*—*C.B.D.*[*V.N.*]

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Se quattro grandezze sieno proporzionali; la massima di esse e la minima saranno maggiori delle due rimanenti.

Sieno le quattro grandezze proporzionali AB, CD, E, F, [*fig.* 139.], cioè AB stia a CD, come E ad F; ed AB sia la massima di esse, e perciò F la minima; dico che le AB, F sieno maggiori delle CD, E.

Si ponga AG uguale ad E, CH uguale ad F. Ed essendo AB a CD, come E ad F; ed AG uguale ad E, CH ad F; sarà pure AB a DC, come AG a CH. Or essendo tutta AB a tutta CD, come la tolta AG alla tolta CH; anche la rimanente GB starà alla rimanente HD, come tutta AB a tutta CD [19. V.]. Ma AB è maggiore di CD; adunque anche GB è maggiore di HD [A. V.]. E perciò essendo AG uguale ad E, e CH ad F; saranno le AG, F uguali alle CH, E. E poichè aggiugnendo cose disuguali ad uguali, risultano cose disuguali [*ass.* 4.]: perciò essendo disuguali le GB, HD, per la ragione, che GB è maggiore di HD, avverrà, che se a GB si aggiunga sì AG, che F, e ad HD sì CH, che E, risulteranno necessariamente le AB, F maggiori delle CD, E.

E quindi se quattro grandezze *ec.* — *C.B.D.*

FINE DEL QUINTO LIBRO.

TEORICA

DELLA

RAGION COMPOSTA.

Quantunque le proprietà della *ragion composta* si possano facilmente dedurre dalla teorica delle ragioni esposta da Euclide, per cui ci potremmo astenere di quì parlarne; nulladimeno abbiamo creduto ben fatto pe'giovani l' esporre quelle tra esse, la cui dimostrazione è men facile a rilevarsi, premettendovi come lemma generale la seguente verità, che ordinariamente si assusume da' più accorti geometri; ma che però doveva dimostrarsi.

AVVERTIMENTO.

Tutte le volte che si vuole esprimere che la ragione di M : N è composta dalle altre di A : B, di C : D, di E : F, *ec.*, si scriverà così M : N : : (A : B) (C : D) (E : F) *ec.* E la seguente altra espressione (M : N) (P : Q) *ec.* = (A : B) (C : D) (E : F) *ec.* dinoterà, che la ragione composta dalle prime sia quanto quella che componesi dalle seconde.

PROPOSIZIONE E.

LEMMA GENERALE.

Con qualunque ordine si compongano più ragioni, ne risulta sempre la stessa ragion composta.

Part. I. Se le componenti sono due, ciò si rileva chiaramente dalla Prop. 23. del lib. V.

A B C D

Part. II. Che se esse sieno tre, e composte una volta coll' ordine seguente A : B, B : C, C : D, sicchè la ragione composta da esse sia quella di A : D [*def.* A. V.] : dico che a questa medesima ragione sarà anche uguale quella che si compone dalle stesse tre ragioni col seguente ordine, cioè, A : B, C: D, B : C, o con qualunque altro ordine che si ottiene, prendendo quelle tre ragioni date in tutt' i modi possibili.

Imperocchè essendo C : D :: (B : D) (C : B) [*def.*A. V. e *part.*I.], combinandovi l'altra ragione di A : B, sarà la composta da questa e da quella di C, D uguale alla composta dalle tre ragioni di A : B, di B : D, di C : B, cioè dalle due di A : D, e di C : B; ond'è che combinandovi finalmente la ragione di B: C, risulterà la composta dalle tre ragioni di A : B, di C: D, di B: C uguale alla composta dalle altre di A : D, di C: B, e di B : C, o sia dalle due di A : D, e di C : C [*def.* A. V. e *part.* I.], o dalle due di A : D, e di D : D (potendosi alla ragione di C : C, ch' è di uguaglianza, sostituire l' altra anche tale di D : D, cioè sarà quanto quella di A : D, come si era proposto a dimostrare.

A B C D E

Part. III. In terzo luogo le ragioni componenti sieno quat-

tro, cioè le seguenti A : B, B : C, C : D, D : E, la cui composta è la ragione di A : E; ed esse compongansi un' altra volta coll' ordine seguente, cioè, C : D, A : B, D : E, B : C. E poichè C : D :: (B : D) (C : B), si avrà, combinandovi la ragione di A : B, la composta dalle ragioni di A : B, e di C : D uguale a quell' altra ragione che componesi dalle ragioni di A : B, di B : D, e di C a B, o sia di A : D, e di C : B; e perciò sarà pure (C : D) (A : B) = (A : D) (C : B). E componendo di nuovo con ciascuna delle due precedenti l' altra ragione di D : E; risulterà (C : D) (A : B) (D : E) = (A : D) (C : B) (D : E), cioè = (A : E) (C : B) [*def.* A. V e *part.*II.]. Finalmente combinandovi anche la ragione di B : C, sarà (C : D)(A : B)(D : E) (B : C) = (A : E) (C : B) (B : C), cioè come A : E. E lo stesso dimostrandosi similmente per tutte le diverse altre combinazioni di questo caso, come anche per gli altri seguenti, resta vero ciò che nella presente Proposizione si è enunciato.

PROPOSIZIONE F.

TEOREMA.

Se vi sieno più ragioni, e poi altrettante inverse di esse, ciascuna di ciascuna; la ragione composta da queste sarà anche inversa della ragione, che componesi da quelle.

A : B C : D K : L : M
E : F G : H P : O : N

Sieno le ragioni di A a B, e di C a D; e poi le altre di E ad F, di G ad H inverse di quelle, ciascuna di ciascuna, e si faccia come A : B, così K ad L [*post.lib.*V.], e come C a D, così L ad M; sarà K ad M in ragion composta di K ad L, e di L ad M [*def.*A, V.], cioè di A a B, e di C a D.

In oltre si supponga essere G ad H, come O ad N, ed E ad F, come P ad O; sarà P ad N in ragion composta di P ad O, e di O ad N [*def.* A V.], cioè di E ad F, e di G ad H. Ma perchè A stà a B inversamente come F ad E; ed A sta B, come K ad L, ed F sta ad E, invertendo, come O a P, sarà K ad L, come O a P. Similmente si dimostra essere L ad M, come N ad O. Laonde, per equalità, dovrà stare K ad M, come N a P [22. V.]. Ma la ragione di N a P è inversa dell'altra di P ad N, ch'è la ragione composta da quelle di E ad F, e di G ad H. Adunque questa ragione composta sarà inversa di quella di K ad M, cioè della ragione composta dalle ragioni di A a B, e di C a D. --- C. B. D.

PROPOSIZIONE G.

TEOREMA.

Se in una ragione composta da due, una delle componenti sia inversa dell' altra; tal composta sarà di uguaglianza. E se una ragione composta da due altre sia di uguaglianza, l' una delle componenti sarà inversa dell' altra.

A : B   C : D   E : F : G.

Sieno le due ragioni di A a B, e di C a D, e questa seconda sia inversa della prima, cioè stia A a B, come D a C. Si supponga A a B, come E ad F [*post.* V.], e C a D, come F a G, sarà la ragione di E a G composta da quelle di A a B, e di C a D. Or poichè C sta a D, come F a G, sarà invertendo G ad F, come D a C [C. V.], cioè come A a B, o sia come E ad F. Laonde serbando ad F ugual ragione sì E, che G, sarà E uguale a G [9. V.]; e perciò la ragione di E a G sarà di uguaglianza.

Sia ora di uguaglianza la ragione che componesi da quelle

di A a B, di C a D; e perciò sia, fatto lo stesso apparecchio di poc' anzi, E uguale a G, starà E ad F, come G ad F. Ma E sta ad F, come A a B, ed invertendo G sta ad F, come D a C. Adunque starà A a B, come D a C, cioè una delle componenti sarà inversa dell' altra *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE H.

TEOREMA.

Se tra le componenti di una ragion composta ve ne sia una uguale all' inversa dell' altra; tal ragione composta sarà quanto quella che si ottiene componendo le rimanenti.

A : B C : D E : F G : H

K : L : M : N : O

Sieno le ragioni componenti di A a B, di C a D, di E ad F, e di G ad H, tra le quali vi sia quella di A a B inversa dell' altra di C a D, cioè stia A a B, come D a C. Si supponga essere A a B, come K ad L [*post.lib.*V.], sarà C a D, come L ad un' altra grandezza M uguale a K. Sia poi E ad F, come M ad N, e G ad H, come N ad O, sarà la ragione di K ad O composta da tutte le ragioni date; e quella di M ad O sarà composta dalle stesse meno le due di A a B, e di C a D, che si eran supposte l' una inversa dell' altra. Ma essendo M uguale a K, sta M : O : : K : O. Adunque la composta da tutte le ragioni date è uguale alla composta dalle stesse meno le due una inversa dell' altra *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE J.

TEOREMA.

Se in due ragioni, che ne compongono un'altra si scambiino tra loro gli antecedenti, o, ch'è lo stesso, i conseguenti; tal composta resterà sempre la stessa.

A : B   C : D

D   B

Sieno le ragioni di A a B, e di C a D; e tra i termini della prima vi si frapponga il conseguente D della seconda, e tra quelli della seconda il conseguente B della prima, sarà la ragione di A a B composta da quelle di A a D, e di D a B [*def.* A V.]; e la ragione di C a D si comporrà da quelle di C a B, e di B a D. Laonde la composta da quelle due ragioni proposte sarà quanto la composta dalle ragioni di A a D, di D a B, di C a B, e di B a D, cioè quanto la composta dalle ragioni di A a D, e di C a B, essendo la ragione di D a B inversa di quella di B a D [H V.]. Vale a dire che scambiandosi i conseguenti, o pur gli antecedenti delle due ragioni componenti la ragion composta non si muta *ec.* — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE K.

TEOREMA.

Una delle componenti una ragion composta, è uguale a questa stessa composta componendovi le inverse delle altre componenti.

M : N

A : B   B : C   C : D

Sia la ragione di M : N composta da quelle di A a B, B a C, C a D: dico che debba una delle componenti A a B essere uguale alla ragione di M : N, componendovi le altre di C a B, D a C.

Imperocchè essendo M : N : : (A : B) (B : C) (C : D), sarà M : N : : A : D. Or se questa ragione di A : D si componga colle altre di C : B, D : C, una tal composta (A : D) (D : C) (C : B) risulterà precisamente espressa da quella di A : B. Adunque ec. — *C.B.D.*

IL SESTO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE.

DEFINIZIONI.

I. Le figure rettilinee *simili* sono quelle, che hanno gli angoli uguali, ciascuno a ciascuno, e proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali.

II. Figure *reciproche* si dicono quelle, nelle quali i termini di una proporzione, che abbia luogo in esse, sieno così disposti, che s' incontrino gli estremi di quella in una figura, ed i medj nell' altra; ed allora i termini di questa proporzione si dicono *reciprocamente proporzionali*. [*V.N.*]

III. Una linea retta dicesi segata in *estrema, e media ragione*, quando sta tutta la linea alla porzione maggiore, così questa alla minore.

IV. L' *Altezza* di una qualche figura è la perpendicolare, che dal vertice di essa si tira sopra la base.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

I triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno la medesima altezza, sono tra loro come le basi.

Sieno i triangoli ABC, ACD [*fig.* 140.], ed i paralle-

logrammi EC, CF, che abbiano la stessa altezza, cioè la perpendicolare dal punto A tirata alla BD: dico che come la base BC base CD, così stia il triangolo ABC al triangolo ACD, ed il parallelogrammo EC all' altro CF.

Imperocchè si prolunghi BD dall' una e l'altra parte verso H, ed L, e si pongano uguali alla base BC quante si vogliano BG, GH, ed alla base CD, quante altre ne piaccia DK, KL; indi giungansi le AG, AH, AK, AL. E poichè le CB, BG, GH sono uguali tra loro; saranno anche uguali i triangoli AHG, AGB, ABC [38. I.]; e perciò quanto multiplice è la base HC della base BC, altrettanto il triangolo AHC è multiplice del triangolo ABC. Per la stessa ragione quanto è multiplice la base LC della base CD, altrettanto l'è il triangolo ALC del triangolo ACD. Or se la base HC è uguale alla base CL, anche il triangolo AHC sarà uguale al triangolo ALC; se la base HC è maggiore della base CL, il triangolo AHC sarà maggiore dell' altro ALC; e se è minore, minore; perciò avremo quattro grandezze, cioè le due basi BC, CD, ed i due triangoli ABC, ACD; e si sono presi gli ugualmente multiplici della base BC, e del triangolo ABC, cioè la base HC, ed il triangolo AHC; e della base CD, e del triangolo ACD si sono presi anche gli altri ugualmente multiplici qualunque, cioè la base CL, ed il triangolo ALC; e si è dimostrato, che se la base HC è maggiore della base CL, il triangolo AHC debba pur essere maggiore del triangolo ALC; e se è uguale, uguale; se minore, minore; adunque dovrà stare la base BC alla base CD, come il triangolo ABC al triangolo ACD [*def.* 5. V.].

Or del triangolo ABC n'è doppio il parallelogrammo EC, e dell' altro triangolo ACD n' è pur doppio il parallelogrammo FC [41. I.]; e le grandezze hanno l' una all' altra la stessa ragione, che i loro ugualmente multiplici [15. V]: quindi come il triangolo ABC al triangolo ACD, così starà il parallelogrammo EC al parallelogrammo CF. Laonde essendosi dimostrato, che stia come la base BC alla base CD, così il triangolo ABC al triangolo ACD; e come quel triangolo a questo, così il parallelogrammo EC all' altro CF; sarà anche come la

base BC alla base CD, così il parallelogrammo EC all' altro CF [11. V.].

Per la qual cosa i triangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se nel triangolo sia tirata una linea retta parallela ad un lato; quella dividerà proporzionalmente gli altri due lati di esso triangolo: e se due lati del triangolo siensi proporzionalmente divisi; la linea retta, che unisce le sezioni, sarà parallela all' altro lato del triangolo.

Si tiri ad un lato BC del triangolo ABC la parallela DE: dico che come BD a DA, così stia CE ad EA.

Giungansi le BE, CD; sarà il triangolo BDE uguale all' altro CDE; poichè sono sopra la medesima base DE, e tra le stesse parallele DE, BC [37. I]: è poi ADE un altro triangolo; e le grandezze uguali serbano la stessa ragione ad una medesima grandezza [7. V.]; adunque come il triangolo BDE al triangolo ADE, così sta il triangolo CDE allo stesso ADE. Ma il triangolo BCE sta al triangolo ADE, come BD a DA; poichè avendo essi la stessa altezza, cioè la perpendicolare dal punto E tirata alla AB, sono fra loro come le basi [1. VI.]; e per la medesima ragione il triangolo CDE sta all' altro ADE, come CE ad EA: quindi come BD a DA, così sta CE ad EA [11. V.].

Siano ora divisi proporzionalmente i lati AB, AC del triangolo ABC, cioè stia come BD a DA, così CE ad EA; e giungasi DE: dico che DE sia parallela a BC.

Fatta la stessa costruzione; poichè BD sta a DA, come CE ad EA; e poi come BD a DA, così sta il triangolo BDE all' altro ADE [1. VI.], e come CE ad EA, così è

pure il triangolo CDE al triangolo ADE: sarà il triangolo CDE al triangolo ADE, come il triangolo BDE allo stesso AED. Per la qual cosa serbando ciascuno de' triangoli BDE, CDE la stessa ragione al triangolo ADE, sarà il triangolo BDE uguale al triangolo CDE [9. V.]. Ma sono nella medesima base DE; ed i triangoli uguali costituiti sopra la base stessa, sono anche tra le medesime parallele [39. I.]: adunque DE è parallela a BC.

E perciò se nel triangolo siasi tirata *ec.* — *C.B.D.*[*V.N.*]

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se un angolo del triangolo sia diviso per metà, e la linea retta, che divide l' angolo seghi anche la base, le porzioni della base avranno la stessa ragione, che gli altri lati del triangolo: e se le porzioni della base abbiano la stessa ragione, che gli altri lati del triangolo; la linea retta, che si tira dal vertice alla sezione, dividerà per metà l' angolo del triangolo.

Sia il triangolo ABC [*fig.* 142.], e l'angolo BAC si divida per metà con linea retta AD: dico che come BD a DC, così stia BA ad AC.

Per lo punto C si tiri CE parallela a DA, che concorra con la BA prolungata nel punto E. E poichè nelle linee rette parallele AD, EC cade la linea retta AC; sarà l' angolo ACE uguale all' angolo CAD [29. I], ma si pone l' angolo CAD uguale all'angolo BAD; quindi sarà pure l'angolo BAD uguale all' altro ACE. Similmente, poichè nelle parallele AD, EC cade la linea retta BAE, sarà l' angolo esteriore BAD uguale all' interiore, ed opposto AEC [29. I.]: ma si è dimostrato l'angolo ACE uguale all' angolo BAD; adunque sarà l'angolo ACE uguale all'altro AEC; e perciò il lato AE è uguale al lato

AC [6.I.] Or poichè ad un lato del triangolo BCE, cioè ad EC, si è tirata la parallela AD; sarà come BD a DC, così BA ad AE [2. VI.]: ma AE è uguale ad AC; quindi come BD a DC, così sta BA ad AC [7. V.].

Sia ora BD a DC, come BA ad AC, e giungasi AD: dico che l'angolo BAC sia diviso per metà dalla linea retta AD.

Imperocchè, fatta la stessa costruzione, BD sta a DC come BA ad AC: e come BD a DC, così sta pure BA ad AE; mentre ad uno de' lati del triangolo BCE, cioè ad EC, si è tirata la parallela AD [2. VI.]; perciò sarà BA ad AC, come BA ad AE: quindi AC è uguale ad AE [9. V.], e perciò l'angolo AEC è uguale all' angolo ACE [6. I.]. Ma l'angolo AEC è uguale all'angolo esteriore BAD; e l'angolo ACE è uguale all' alterno CAD [29. I.]: quindi sarà l'angolo BAD uguale all' altro CAD; e perciò l'angolo BAC è diviso per metà dalla linea retta AD.

Se dunque un angolo di un triangolo *ec.*—*C.B.D.* [*V.N*]

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Ne' triangoli equiangoli, i lati dintorno agli angoli uguali sono proporzionali fra loro; e sono omologhi que' lati, che sottendono angoli uguali.

Sieno i triangoli equiangoli ABC, DCE [*fig.* 143.], i quali abbiano l'angolo ABC uguale all' angolo DCE, l' angolo ACB all' altro DEC, e l' angolo CAB all' angolo CDE: dico che sieno proporzionali i lati de' triangoli ABC, DCE, che sono dintorno agli angoli uguali; ed omologhi que' lati, che sottendono angoli uguali.

Si ponga BC per diritto con CE. Ed essendo gli angoli ABC, ACB minori di due retti [17. I.], e l' angolo

ACB uguale all'angolo DEC; perciò saranno anche gli angoli ABC, DEC minori di due retti: quindi le BA, ED prolungate s'incontreranno [*post*.6.]. Si prolunghino, e s'incontrino nel punto F; ed essendo l'angolo DCE uguale all'angolo ABC, sarà BF parallela a DC [28.I]. Similmente poichè l'angolo ACB è uguale all'angolo DEC, sarà AC parallela ad FE: laonde FACD è un parallelogrammo; e perciò FA è uguale a CD, ed AC ad FD [34. I.]. Or essendosi tirata ad uno de'lati del triangolo FBE, cioè ad FE, la parallela AC, sarà BA ad AF, come BC a CE [2. VI.]: ma la AF è uguale alla CD; adunque BA sta a CD, come BC a CE [7. V.]; e permutando starà AB a BC, come DC a CE. Nel modo stesso, poichè CD è parallela a BF, sarà BC a CE, come FD a DE: ma DF è uguale ad AC; adunque come BC a CE, così sta AC ad ED; e permutando starà BC a CA, come CE ad ED. Laonde essendosi dimostrato, che stia AB a BC, come DC a CE, e BC a CA, come CE ad ED, per equalità, starà BA ad AC, come CD a DE [22.V.].

E perciò ne' triangoli equiangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano i lati proporzionali, saranno ancora equiangoli, ed avranno uguali quegli angoli, che sono sottesi dai lati omologhi.

Sieno i due triangoli ABC, DEF [*fig.* 144.], i quali abbiano i lati proporzionali, e sia come AB a BC, così DE ad EF, come BC a CA, così EF ad FD; e perciò, per equalità, come BA ad AC, così ED a DF: dico che il triangolo ABC sia equiangolo al triangolo DEF, ed essere uguali gli angoli che sono sottesi dai lati omologhi, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF, l'angolo BCA all'angolo EFD; ed in oltre l'angolo BAC all'angolo EDF.

Imperocchè si costituiscano alla linea retta EF, ed ai punti E, F in essa, l'angolo FEG guale all'angolo ABC, e l'angolo EFG uguale all'altro BCA [23. I.]; sarà il terzo angolo BAC uguale al terzo angolo EGF [32. I.]: perciò il triangolo ABC è equiangolo all'altro EGF; e quindi hanno proporzionali i lati, che sottendono angoli uguali [4. VI.]. Adunque AB sta a BC, come GE ad EF: ma come AB a BC, così sta pure DE ad EF; perciò sarà DE ad EF, come GE ad EF [11. V.]. Laonde avendo sì DE, che EG la stessa ragione ad EF; sarà DE uguale ad EG [9.V.]. Per la medesima ragione anche DF è uguale ad FG: laonde essendo DE uguale ad EG, ed EF comune; le due DE, EF sono uguali alle due GE, EF; e la base DF è uguale alla base FG: quindi l'angolo DEF è uguale all'angolo GEF, il triangolo DEF è uguale al triangolo GEF, ed i rimanenenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, l'uno all'altro, quelli che sono sottesi dai lati uguali [8. I.]. Adunque l'angolo DFE è uguale all'angolo GFE, e l'angolo EDF all'angolo EGF. Ed essendo l'angolo FED uguale all'angolo GEF, e l'angolo GEF all'angolo ABC; sarà l'angolo ABC uguale all'angolo FED. Per la stessa ragione l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE; e quindi anche l'angolo in A è uguale a quello in D; perciò il triangolo ABC sarà equiangolo all'altro DEF.

E quindi se due triangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati dintorno a questi angoli uguali; saranno equiangoli i triangoli, ed avranno uguali quegli angoli, che sono sottesi dai lati omologhi.

Sieno i due triangoli ABC, DEF [*fig.* 145.], i quali

abbiano un angolo BAC uguale ad un altro angolo EDF, e proporzionali i lati dintorno a questi angoli uguali, cioè sia BA ad AC, come ED a DF: dico che il triangolo ABC sia equiangolo al triangolo DEF, e che l'angolo ABC sia uguale all'angolo DEF, e l'altro ACB all'altro DFE.

Si costituiscano alla linea retta DF, e ne' punti D, F in essa, l'angolo FDG uguale all'angolo BAC, o EDF, e l'angolo DFG uguale all'altro ACB [23. I.]; sarà il rimanente angolo in B uguale al rimanente in G [32. I.]: quindi il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DGF; e perciò sta BA ad AC, come GD a DF [4. VI.]. Ma si è supposto, che come BA ad AC, così stia ED a DF; adunque ED sta a DF, come GD a DF [11.V.]. E perciò essendo ED uguale a DG [9. V.], e DF comune; le due ED, DF sono uguali alle due altre GD, DF, l'una all'altra; l'angolo EDF è anche uguale all'angolo GDF: adunque la base EF è uguale alla base FG, il triangolo EDF è uguale al triangolo GDF, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli che sono sottesi dai lati uguali [4. I.] Laonde l'angolo DFG è uguale all'angolo DFE; e l'angolo in G all'angolo in E. Ma l'angolo DFG è uguale all'angolo ACB; perciò anche l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE: si è poi supposto, che l'angolo BAC sia uguale all'angolo EDF; quindi il rimanente angolo in B sarà uguale al rimanente in E; per la qual cosa il triangolo ABC sarà equiangolo all'altro DEF.

E perciò se due triangoli *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, proporzionali i lati dintorno a due altri angoli, e ciascuno de' rimanenti angoli sia o acuto, o ottuso; essi triangoli saranno equiangoli, ed avranno uguali quegli angoli dintorno ai quali sono i lati proporzionali.

Sieno i due triangoli ABC, DEF [*fig.* 146.], che abbiano un angolo uguale ad un angolo, cioè l' angolo BAC uguale all' angolo EDF, ed abbiano di più proporzionali i lati dintorno agli altri angoli ABC, DEF, tal che sia DE ad EF, come AB a BC; e primieramente ciascuno de' rimanenti angoli in C, ed in F sia acuto: dico che il triangolo ABC sia equiangolo al triangolo DEF, e che l' angolo ABC sia uguale all' angolo DEF, ed il rimanente, cioè l'angolo in C, uguale al rimanente in F.

Poichè se l' angolo ABC non è uguale all' angolo DEF; uno di essi è maggiore: sia maggiore ABC; e si constituisca alla linea retta AB, nel punto B in essa l' angolo ABG uguale all' angolo DEF [23. I.]. Ed essendo l' angolo in A uguale a quello in D, e l' angolo ABG uguale all' angolo DEF; sarà il rimanente angolo AGB uguale al rimanente DFE [32. I.]; quindi il triangolo ABG è equiangolo al triangolo DEF; e perciò come AB a BG, così sta DE ad EF [4. VI.]: ma si è supposto essere DE ad EF, come AB a BC; adunque come AB a BC, così sta la stessa AB a BG [11. V.]. Laonde avendo AB la medesima ragione sì a BC, che a BG, sarà BC uguale a BG [9. V.]; e quindi l' angolo in C è uguale all' angolo BGC [5. I.]: per lo che essendosi supposto acuto l' angolo in C, sarà anche acuto l' altro BGC; e per conseguenza sarà

ottuso l' angolo AGB, che gli è adjacente [13. I.]. Ma si è dimostrato l' angolo AGB uguale a quello in F; adunque l' angolo in F è ottuso: si era supposto acuto; lo che è assurdo. Quindi non è l' angolo ABC disuguale all' angolo DEF; e perciò gli è uguale: è poi l' angolo in A uguale a quello in D; adunque ancora il rimanente in C è uguale al rimanente in F. Laonde il triangolo ABC è equiangolo all' altro DEF.

Or si supponga essere ottuso ciascuno degli angoli in C, ed in F: dico similmente che debba il triangolo ABC essere equiangolo all' altro DEF.

Poichè, fatta la stessa costruzione, dimostreremo similmente, che BC sia uguale a BG, e l' angolo in C uguale all' angolo BGC: ma l' angolo in C è ottuso; perciò anche ottuso è l' altro BGC. Quindi due angoli del triangolo BGC non sono minori di due retti; il che è impossibile [17. I.]. Adunque l' angolo ABC non è disuguale all' angolo DEF; ma gli è necessariamente uguale; e perciò risulterà, come nel caso precedente, il triangolo ABC equiangolo all' altro DEF.

Laonde se due triangoli abbiano un angolo, ec. — *C.B.D.[V.N.]*.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se nel triangolo rettangolo dall' angolo retto si tiri la perpendicolare alla base; i triangoli adjacenti alla perpendicolare sono simili ed a tutto il triangolo, e tra loro.

Sia il triangolo rettangolo ABC [*fig.* 147.], che ha retto l' angolo BAC; e dal punto A si tiri alla BC la perpendicolare AD: dico che i triangoli ABD, ADC sieno simili ed a tutto il triangolo ABC, e tra loro.

Poichè l' angolo BAC è uguale all' angolo ADB, essendo retto sì l' uno, che l' altro; e l' angolo in B è comune ai due

triangoli ABC , ABD ; sarà il rimanente angolo ACB uguale al rimanente angolo BAD [32. I.]: quindi il triangolo ABC è equiangolo all' altro ABD ; e perciò avranno proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali [4.VI.] , e saranno simili [*def*.1.VI.]. Dell' istessa maniera si dimostrerà , che il triangolo ADC sia simile all' altro ABC. Adunque ciascuno de' triangoli ABD , ADC è simile a tutto il triangolo ABC.

Dico di più, che i triangoli ABD, ADC sieno anche simili tra loro.

Poichè l' angolo retto BDA è uguale al retto ADC ; e si è dimostrato l' angolo BAD uguale all' angolo in C ; sarà il rimanente angolo in B uguale al rimanente DAC : quindi il triangolo ABD è equiangolo , e perciò simile al triangolo ADC.

Laonde se nel triangolo rettangolo *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*]

COROLLARIO

È chiaro da ciò , che : *Nel triangolo rettangolo la perpendicolare , che dall' angolo retto si tira sopra la base , è media proporzionale tra i segmenti della base : ed inoltre , che ciascun lato è medio proporzionale tra la base , ed il segmento ad esso contermine.*

Poichè ne' triangoli equiangoli BDA , ADC, BD sta a DA, come DA a DC [4. VI.] : negli altri triangoli equiangoli ABC, DBA , BC sta a BA , come BA a BD ; e finalmente ne' triangoli equiangoli ABC , DAC , CB sta a CA , come CA a CD.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Tagliare da una linea retta data quella parte , che si dimanda.

Sia data la linea retta AB [*fig.*148.] : fa d' uopo taglia-

re da essa quella parte, che si dimanda.

Dal punto A si tiri la linea retta AC, la quale comprenda con la AB un angolo qualunque; poi prendasi in AC un qualunque punto D, ed indi sulla stessa AC si prenda DE uguale ad AD, EC uguale a DE, e così successivamente, finchè tutte queste AD, DE, EC prese insieme, cioè la AC sia tanto multiplice di AD, quanto AB è multiplice della parte, che si vuol tagliare da essa: finalmente giungasi la BC, alla quale si tiri per D la parallela DF.

E poichè si è tirata la parallela FD ad un lato BC del triangolo ABC; sarà come CD a DA, così BF ad FA [2.VI.]; e componendo, come CA ad AD, così BA ad AF [18. V.]; ed inoltre permutando sarà CA ad AB, come AD ad AF [16.V.]. Ma CA è multiplice di AD; adunque BA sarà ugualmente multiplice di AF [B. V.]; e perciò qualunque parte è AD di AC, la stessa parte sarà AF di AB: laonde AF è la parte, che doveva tagliarsi dalla linea retta AB.

Quindi dalla data linea retta AB si è tagliata la parte cercata AF. — *C.B.F.* [*V. N.*]

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Data una linea retta non divisa, dividerla similmente ad un' altra linea retta divisa.

Sia data la linea retta non divisa AB [*fig.*149.], e la divisa AC: fa d'uopo dividere la linea retta non divisa AB similmente alla divisa AC.

Sia AC divisa ne' punti D, E, e si dispongano le linee rette date ad angolo qualunque; indi giungasi BC, e per gli punti D, E, si tirino le DF, EG parallele a BC [31.I.], e per D si tiri DHK parallela ad AB: è dunque un parallelogrammo ciascuna delle figure FH, HB; e perciò DH è uguale

ad FG, HK a GB [34. I.]. Or perchè ad un lato del triangolo DKC, cioè a KC, si è tirata la parallela HE, sarà come CE ad ED, così KH ad HD [2. VI.]: ma KH è uguale a BG, ed HD a GF; adunque come CE ad ED, così sta BG a GF. Similmente, essendosi ad un lato del triangolo AGE, cioè ad EG, tirata la parallela FD, starà come ED a DA, così GF ad FA: ma si è dimostrato, che come CE ad ED, così stia BG a GF, e come ED a DA, così è pure GF ad FA.

Quindi la data linea retta non divisa AB si è divisa similmente all' altra linea retta divisa AC. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Date due linee rette, trovare la terza proporzionale in ordine ad esse.

Sieno date le due linee rette AB, AC [*fig.* 150.], le quali dispongansi in modo, che contengano un angolo qualunque: fa d' uopo trovare la terza proporzionale in ordine ad esse AB, AC.

Si prolunghino le AB, AC ne' punti D, E: indi pongasi BD uguale ad AC; ed unita BC, per D si tiri DE parallela a BC [31. I.].

E poichè ad un lato del triangolo ADE, cioè a DE, si è tirata la parallela BC; sarà AB a BD, come AC a CE [2. VI.]: ma BD è uguale ad AC; adunque BA starà ad AC, come AC a CE.

E perciò date due linee rette, si è trovata in ordine ad esse la terza proporzionale. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Date tre linee rette, trovare la quarta proporzionale in ordine ad esse.

Sieno date le tre linee rette A, B, C [*fig.* 151.]: fa d' uopo trovare la quarta proporzionale in ordine ad esse.

Si espongano due linee rette DE, DF in modo, che contengano un qualunque angolo EDF; e si ponga DG uguale ad A, GE uguale a B, e DH uguale a C: indi unita GH, si tiri per E la EF parallela ad essa.

Or ad un lato del triangolo DEF, cioè ad EF, essendosi tirata la parallela GH; sarà DG a GE, come DH ad HF [2. VI.]: ma DG è uguale ad A, GE è uguale a B, e DH è uguale a C; adunque starà A a B, come C ad HF.

E perciò date tre linee rette, si è trovata in ordine ad esse la quarta proporzionale *ec.* — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

Date due linee rette, trovare tra esse la media proporzionale.

Sieno date le due linee rette AB, BC: [*fig.* 152.]: fa d' uopo trovare tra esse la media proporzionale.

Dispongansi per diritto, e nella AC si descriva il semicerchio ADC; dal punto B si tiri BD perpendicolare ad AC [11.I.], e giungansi le AD, DC.

Ed essendo retto l' angolo ADC nel semicerchio [31.III.]; perciò nel triangolo rettangolo ADC, dall' angolo retto si è tira-

ta la perpendicolare DB alla base; quindi sarà DB media proporzionale tra i segmenti AB, BC di essa base [*cor.* 8. VI.].

Adunque date due linee rette, si è trovata tra esse la media proporzionale *ec.* — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

I parallelogrammi uguali, che hanno un angolo uguale ad un angolo, sono figure reciproche; ed hanno reciprocamente proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali: e quei parallelogrammi, che hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati dintorno a questi angoli reciprocamente proporzionali, e che sono perciò figure reciproche, sono uguali tra loro.

Sieno i parallelogrammi uguali AB, BC [*fig.* 151.], i quali abbiano uguali gli angoli in B; e pongansi per diritto le DB, BE; saranno anche per diritto le FB, BG [14. I.]: dico ch'essi parallelogrammi AB, BC sieno figure reciproche, ed abbiano reciprocamente proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali, cioè che stia DB a BE, come GB a BF.

Si compisca il parallelogrammo FE. E poichè il parallelogrammo AB è uguale al parallelogrammo BC, ed FE è un altro parallelogrammo, sarà AB ad FE, come BC ad FE [7.V.]: ma il parallelogrammo AB sta all' altro FE, come DB a BE [1. VI.]; e similmente il parallelogrammo BC sta allo stesso FE, come GB a BF; adunque DB sta a BE, come GB a BF [11. V.].; e perciò i lati de' parallelogrammi AB, BC, dintorno agli angoli uguali, sono reciprocamente proporzionali.

Ora siano reciprocamente proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali, e sia come DB a BE, così GB a BF: dico che il parallelogrammo AB sia uguale al parallelogrammo BC.

Imperocchè essendo DB a BE, come GB a BF; e come DB a BE, così il parallelogrammo AB all' altro FE [1. VI.]; e similmente come GB a BF, così il parallelogrammo BC all' altro FE: sarà il parallelogrammo AB all' altro FE, come il parallelogrammo BC allo stesso FE [11. V.]; e perciò il parallelogrammo AB è uguale all' altro BC [9. V.].

Quindi i parallelogrammi uguali, *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*]

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

I triangoli uguali, che hanno un angolo uguale ad un angolo, sono figure reciproche; ed hanno reciprocamente proporzionali i lati diutorno agli angoli uguali: e quei triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati dintorno a questi angoli reciprocamente proporzionali, e che sono perciò figure reciproche, sono tra loro uguali.

I triangoli uguali ABC, ADE [*fig.* 154.] abbiano un angolo uguale ad un angolo, cioè l' angolo BAC uguale all' angolo DAE: dico ch' essi sieno figure reciproche; ed abbiano reciprocamente proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali, vale a dire, che stia CA ad AD, come EA ad AB.

Si dispongano essi triangoli in modo, che CA sia per diritto con AD; sarà anche BA per diritto con AE [14 I.]: giungasi BD. E poichè il triangolo ABC è uguale al triangolo ADE, ed ABD è un altro triangolo; sarà come il triangolo CAB all'altro BAD, così il triangolo ADE allo stesso BAD: ma come il triangolo CAB al triangolo BAD, così sta CA ad AD [1. VI.]; e come il triangolo EAD allo stesso BAD, così sta EA ad AB; adunque come CA ad AD, così sta EA ad AB [11. V.]. E perciò i triangoli ABC, ADE sono figu-

re reciproche, ed hanno reciprocamente proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali.

Or i triangoli ABC, ADE abbiano reciprocamente proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali; vale a dire come CA ad AD, così stia EA ad AB, e sieno perciò essi figure reciproche: dico che il triangolo ABC sia uguale al triangolo ADE.

Poichè, giunta come prima BD, essendo CA ad AD, come EA ad AB; e come CA ad AD, così il triangolo ABC all'altro BAD [1. VI.]; e similmente come EA ad AB, così il triangolo EAD all'altro BAD: sarà il triangolo ABC al triangolo BAD, come il triangolo EAD allo stesso BAD [11. V.]. Per la qual cosa sarà il triangolo ABC uguale al triangolo ADE [9. V.].

E perciò i triangoli uguali, ec. — *C.B.D.* [*F.N.*]

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se quattro linee rette sieno proporzionali, il rettangolo contenuto delle estreme è uguale a quello, che si contiene dalle medie: e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale a quello, che si contiene dalle medie, le quattro linee rette saranno proporzionali.

Sieno le quattro linee rette proporzionali AB, CD, E, F [*fig.*155.], e sia come AB a CD, così E ad F: dico che il rettangolo contenuto dalle linee rette AB, F, sia uguale all'altro, che si contiene dalle CD, E.

Si tirino da' punti A, C le perpendicolari AG, CH alle AB, CD; pongasi AG uguale ad F, CH uguale ad E, e si compiano i parallelogrammi BG, DH. E poichè AB sta a CD, come E ad F; ed è E uguale a CH, ed F ad AG; perciò sarà come AB a CD, così CH ad AG; e quindi i lati de' parallelogrammi BG, DH, che sono dintorno agli angoli uguali,

sono reciprocamente proporzionali. Ma quando i lati dintorno agli angoli de' parallelogrammi equiangoli sono reciprocamente proporzionali, essi sono uguali [14. VI.]; adunque il parallelogrammo BG è uguale al parallelogrammo DH. Or il parallelogrammo rettangolo BG è quello, ch'è contenuto dalle linee rette AB, F; poichè AG è uguale ad F: ed il parallelogrammo rettangolo DH è contenuto dalle CD, E, essendo CH uguale ad E; quindi il rettangolo contenuto dalle AB, F è uguale all'altro, che si contiene dalle CD, F.

Sia ora il rettangolo contenuto dalle AB, F uguale a quello, che si contiene dalle CD, E: dico che le quattro linee rette sieno proporzionali; cioè che stia AB a CD, come E ad F.

Fatta la stessa costruzione; poichè il rettangolo contenuto dalle AB, F è uguale all'altro, che si contiene dalle CD, E; ed il rettangolo contenuto dalle AB, F è BG; poichè AG è uguale ad F: e l'altro rettangolo contenuto dalle CD, E è DH, per essere CH uguale ad E; sarà il parallelogrammo BG uguale all'altro DH. Ma sono di più equiangoli; ed i parallelogrammi uguali, ed equiangoli hanno i lati dintorno agli angoli uguali reciprocamente proporzionali [14. VI.]; perciò come AB a CD, così sta CH ad AG. Ed è poi CH uguale ad E, AG ad F; adunque AB sta a CD, come E ad F.

Laonde se quattro linee rette, *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se tre linee rette sieno proporzionali il rettangolo contenuto dalle estreme sarà uguale al quadrato, che si descrive dalla media: e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al quadrato descritto dalla media, le tre linee rette saranno proporzionali.

Sieno le tre linee rette proporzionali A, B, C [*fig.* 156.],

e stia come A a B, così B a C: dico che il rettangolo contenuto dalle A, C sia uguale al quadrato, che si descrive dalla media B.

Si ponga D uguale a B. Ed essendo A a B, come B a C, e B uguale a D; sarà A a B, così D a C: ma se quattro linee rette sono proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale a quello, che si contiene dalle medie [16. VI.]; adunque il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale a quello, che si contiene dalle B, D. Or il rettangolo contenuto dalle B, D è uguale al quadrato di B; poichè B è uguale a D: perciò anche il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale al quadrato di B.

Sia ora il rettangolo contenuto dalle A, C uguale al quadrato, che si descrive dalla B: dico che come A a B, così stia B a C.

Fatta la stessa costruzione: poichè il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale al quadrato di B; ed il quadrato di B è lo stesso, che il rettangolo contenuto dalle B, D, perchè B è uguale a D; sarà il rettangolo contenuto dalle A, C uguale a quello, che si contiene dalle B, D. Ma se il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale a quello, che si contiene dalle medie, le quattro linee rette sono proporzionali [16. VI.]; adunque come A a B, così sta D a C. È poi B uguale a D: laonde come A a B, così sta B a C.

E perciò se tre linee rette, *cc.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XVIII.

PROBLEMA.

Descrivere da una data linea retta un rettilineo simile, e similmente posto ad un rettilineo dato.

Sia data la linea retta AB [*fig.* 157.], e dato anche il rettilineo CDEFG: fa d'uopo descrivere dalla linea retta AB un rettilineo simile, e similmente posto al rettilineo dato CDEFG.

Si divida il rettilineo CDEFG in triangoli per mezzo delle DG, DF; e poi alla linea retta AB, e ne' punti A, B in essa si costituisca l' angolo BAH uguale all' angolo in C [23. I.], e l' angolo ABH uguale all' angolo CDG; sarà il terzo angolo CGD uguale al terzo angolo AHB [32. I.]; e perciò il triangolo CGD è equiangolo all' altro AHB. Similmente si costituiscano alla linea retta BH, ch' è un lato del triangolo ABH omologo all' altro DG del triangolo CDG, e ne' punti H, B in essa l' angolo BHK uguale all' angolo DGF, e l' angolo HBK uguale all' altro GDF; sarà il terzo angolo in K uguale al terzo angolo in F: perciò il triangolo BHK è pure equiangolo al triangolo DGF. In seguito alla linea retta HK, ch' è un lato del triangolo BHK omologo al lato DF del triangolo DGF, e ne' punti K, B in essa si costituisca l' angolo BKL uguale all' angolo DFE, e l' angolo KBL uguale all' altro FDE; sarà il terzo angolo in L uguale al terzo in E, ed il triangolo BKL equiangolo all' altro DFE: e così si continui a fare se nel rettilineo CDEFG vi sieno altri triangoli. Or essendo l' angolo AHB uguale all' angolo CGD, e l' angolo BHK all' angolo DGF; sarà tutto l' angolo AHK uguale a tutto l' altro CGF: e per la stessa ragione l' angolo HKL è uguale all' angolo GFE. Di più l' angolo ABH è uguale all' angolo CDG, l' angolo HBK all' angolo GDF, e l' angolo KBL all' altro FDE; quindi tutto l' angolo ABL è uguale a tutto l' angolo CDE: sono anche gli angoli in A, ed in L uguali rispettivamente a quelli in C, ed in E; adunque il rettilineo ABLKH è equiangolo all' altro CDEFG. Ma di più questi rettilinei hanno proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali; poichè essendo simili i triangoli BAH, DCG, sta BA ad AH, come DC a CG, ed AH sta ad HB, come CG a GD [*def.* 1.VI.]: ed è poi anche BH ad HK, come DG a GF, perchè sono anche simili i triangoli BHK, DGF; quindi, per equalità, sarà AH ad HK, come CG a GF [22. V.]. Similmente si dimostrerà HK a KL, come GF ad FE. Inoltre per gli triangoli simili KLB, FED, sta KL ad LB, come FE ad ED, ed LB a BK, come ED a DF: ed è anche KB a BH, come FD a DG, per gli triangoli simili KBH, FDG;

quindi, per equalità, sarà LB a BH, come ED a DG. E poichè essendo simili i triangoli HBA, GDC, sta pure HB a BA, come GD a DC; sarà di nuovo per equalità LB a BA, come ED a DC. Adunque i rettilinei ABLKH, e CDEFG, che si erano già dimostrati equiangoli, hanno anche proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali; e perciò sono simili [*def.* 1.VI.].

Laonde si è descritto da una linea retta data un rettilineo simile, e similmente posto ad un rettilineo dato ec.—*C.B.D.*[*F.N.*].

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

I triangoli simili sono in ragion duplicata di quella che hanno i lati omologhi tra loro.

Sieno i triangoli simili ABC, DEF [*fig.* 158.]; e sia l'angolo in B uguale a quello in E, ed AB a BC, come DE ad EF; in modo tale, che il lato BC sia omologo al lato EF: dico che il triangolo ABC serbi al triangolo DEF ragion duplicata di quella, che ha BC ad EF.

Si trovi in ordine alle BC, EF la terza proporzionale BG [11. VI.], sicchè sia BC ad EF, come EF a BG; e giungasi GA. E poichè come AB a BC, così sta DE ad EF, e queste grandezze sono omogenee; sarà, permutando, come AB a DE, così BC ad EF [16. V.]: ma come BC ad EF, così sta EF a BG; adunque AB sta a DE, come EF a BG [11. V.]; e perciò ne' triangoli ABG, DEF sono reciprocamente proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali. Or que' triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati dintorno a questi angoli reciprocamente proporzionali, sono uguali [15. VI.]; adunque il triangolo ABG è uguale al triangolo DEF. Ed essendo BC ad EF, come EF a BG; e perchè se tre linee rette sono proporzionali, la prima dicesi avere alla terza ragion duplicata di quella, che ha la prima alla seconda [*def.* 10. V.]; avrà perciò BC a BG ragion duplicata

di BC ad EF: è poi come BC a BG, così il triangolo ABC al triangolo ABG [1. VI.]; avrà dunque il triangolo ABC al triangolo ABG ragion duplicata di quella, che BC ha ad EF. Per la qual cosa essendo il triangolo ABG uguale al triangolo DEF, anche il triangolo ABC serberà al triangolo DEF ragion duplicata di quella, che ha BC ad EF.

Quindi i triangoli simili *ec.* — *C.B.D.*

COROLLARIO

Da ciò si rileva chiaramente, che:

Se tre linee rette sieno proporzionali, come la prima alla terza, così starà il triangolo descritto dalla prima al triangolo simile, e similmente posto, che si descrive dalla seconda.

Poichè si è dimostrato, che stia CB a BG, come il triangolo ABC al triangolo DEF.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

I poligoni simili si dividono in triangoli simili, uguali in numero, ed omologhi a' tutti: e l' un poligono sta all' altro in ragion duplicata di quella, che ha un lato al suo omologo.

Sieno i poligoni simili ABCDE, FGHKL [*fig.* 159.], e sia il lato AB omologo all' altro FG: dico che i poligoni ABCDE, FGHKL si dividano in triangoli simili, uguali in numero, ed omologhi a' tutti; e che il poligono ABCDE stia all' altro FGHKL in ragion duplicata di quella, che ha AB ad FG.

Giungansi le BE, EC, GL, LH. Ed essendo il poligono ABCDE simile all' altro FGHKL; l' angolo BAE sarà uguale all' angolo GFL [1. VI.]: ma è pure BA ad AE,

come GF ad FL; perciò avendo i due triangoli ABE, FGL un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati dintorno a questi angoli uguali; sarà il triangolo ABE equiangolo all'altro GFL, e per conseguenza simile [6. VI.]; quindi l'angolo ABE è uguale all'angolo FGL. È poi tutto l' angolo ABC uguale a tutto l'altro FGH, per la similitudine de' poligoni; adunque il rimanente angolo EBC è uguale al rimanente LGH. Or siccome per esser simili i triangoli ABE, FGL sta EB a BA, come LG a GF [*def.*1.VI.]: ed è poi, per la similitudine de'poligoni, AB a BC, come FG a GH; così sarà, per equalità, EB a BC, come LG a GH. Laonde i triangoli EBC, GLH avendo proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali EBC, LGH, saranno equiangoli, e perciò simili. Per la stessa ragione il triangolo ECD è simile all' altro LHK; adunque i poligoni simili ABCDE, FGHKL si dividono in triangoli simili, ed uguali in numero.

Dico che questi sieno omologhi a' tutti, cioè ch' essi triangoli sieno proporzionali tra loro, ed a tutt' i poligoni, e che sieno ABE, EBC, ECD gli antecedenti, ed FGL, LGH, LHK i rispettivi conseguenti; e che il poligono ABCDE stia all' altro FGHKL in ragion duplicata di quella che ha un lato al suo omologo, cioè di AB ad FG.

Poichè il triangolo ABE è simile al triangolo FGL; perciò avrà il triangolo ABE al triangolo FGL ragion duplicata di quella, che ha BE a GL [19. VI.]. Per la stessa ragione anche il triangolo BEC sta al triangolo GLH in ragion duplicata di quella, che ha BE a GL: quindi come il triangolo ABE al triangolo FGL, così sta il triangolo BEC al triangolo GLH [11. V.]. Similmente poichè il triangolo EBC è simile al triangolo LGH, avrà il triangolo EBC al triangolo LGH ragion duplicata di quella, che la linea retta CE ha all' altra HL: ma per la stessa ragione anche il triangolo ECD sta al triangolo LHK in ragion duplicata di quella, che CE serba ad HL; quindi come il triangolo EBC al triangolo LGH, così sta il triangolo ECD al triangolo LHK. Si è poi dimostrato, che come il triangolo EBC al triangolo LGH, così sta il triangolo ABE al

triangolo FGL: perciò come il triangolo ABE al triangolo FGL, così sta il triangolo EBC all'altro LGH, ed il triangolo ECD all'altro LHK: ma come un antecedente al suo conseguente, così tutti gli antecedenti a tutt'i conseguenti [12. V.]; quindi il triangolo ABE starà al triangolo FGL, come il poligono ABCDE al poligono FGHKL. Or il triangolo ABE sta al triangolo FGL in ragion duplicata di quella, che ha il lato AB all'omologo FG; mentre i triangoli simili sono in ragion duplicata di quella de' loro lati omologhi [19. VI.]: adunque anche il poligono ABCDE starà al poligono FGHKL in ragion duplicata di quella del lato AB all'omologo FG.

Laonde i poligoni simili *ec.* — *C.B.D.*

COROLLARIO I.

Nel modo stesso si dimostrerà per gli quadrilateri simili, che essi sieno in duplicata ragione di quella de' loro lati omologhi: ed essendosi ciò anche dimostrato pe' triangoli simili [19.VI.]; ne segue generalmente, che:

Le figure rettilinee simili sono in duplicata ragione di quella de' loro lati omologhi. [*V.N.*]

COROLLARIO. II.

Or se si trovi la terza proporzionale X in ordine alle due AB, FG; starà AB ad X in ragion duplicata di quella, che ha AB ad FG [*def.* 10. V.]: ma sta pure il poligono, che ha per lato AB al poligono simile, che ha per lato omologo FG, ed il quadrilatero al quadrilatero in ragion duplicata di quella di un lato all'altro omologo, cioè di AB ad FG [*cor.*1.20.VI.]; adunque come AB ad X, così sta la figura rettilinea, che ha per lato AB all'altra, che ha per lato omologo FG. Lo stesso si è anche dimostrato per gli triangoli [*cor.*19.VI.]. Perciò generalmente

Se tre linee rette sono proporzionali; come la prima alla terza, così sta la figura rettilinea descritta dalla prima all'altra simile, e similmente posta, che si descrive dalla seconda,

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

I rettilinei simili ad uno stesso rettilineo sono anche simili tra loro.

Sia l' uno, e l' altro de' rettilinei A, B [*fig.* 160.] simile al rettilineo C: dico che il rettilineo A sia anche simile al rettilineo B.

Perchè il rettilineo A è simile all' altro C, gli sarà equiangolo, ed essi avranno proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali [*def.* 1. VI.]. Similmente poichè il rettilineo B è simile all' altro C, gli sarà equiangolo, ed essi avranno proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali. Adunque ciascuno de' rettilinei A, B è equiangolo all' altro C, ed ha con questo proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali; perciò il rettilineo A è equiangolo all' altro B, ed ha con questo anche proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali [11. V.]: quindi A è simile a B. — *C.B.D.*.

PROPOSIZIONE XXII.

PROBLEMA.

Se quattro linee rette sieno proporzionali; anche i rettilinei simili, e similmente posti, che si descrivono da esse, saranno proporzionali. E se i rettilinei simili, e similmente posti i quali si descrivono da quattro linee rette sieno proporzionali; anche tali linee rette saranno proporzionali.

Sieno le quattro linee rette proporzionali AB, CD, EF, GH, [*fig.*161.], cioè come AB a CD, così stia EF a GH, e dalle

AB, CD si descrivano i rettilinei simili, e similmente posti KAB, LCD, e dalle altre EF, GH si descrivano pure i rettilinei simili, e similmente posti MF, NH: dico che come il rettilineo KAB al rettilineo LCD, così stia il rettilineo MF all' altro NH.

Si trovi in ordine alle AB, CD la terza proporzionale X [11. VI.]; ed in ordine alle EF, GH la terza proporzionale O. E poichè sta AB a CD, come EF a GH, sarà anche CD ad X, come GH ad O [11. V.]; quindi, per equalità, come AB ad X, così starà EF ad O [22. V.]. Ma come AB ad X, così sta il rettilineo KAB all'altro LCD [*cor.*2.20.VI.], e come EF ad O, così è pure il rettilineo MF all' altro NH; adunque come il rettilineo KAB al rettilineo LCD, così sta il rettilineo MF all' altro NH [11. V.].

Sia ora come il rettilineo KAB al rettilineo LCD, così il rettilineo MF all'altro NH: dico che come AB a CD, così stia EF a GH.

Si faccia come AB a CD, così EF a PR [12. VI.], e descrivasi dalla PR il rettilineo SR simile, e similmente posto all' altro MF, o pure ad NH [18. VI.]. E poichè come AB a CD, così sta EF a PR, e dalle AB, CD si sono descritti i rettilinei simili, e similmente posti KAB, LCD; e dalle EF, PR gli altri rettilinei anche simili, e similmente posti MF, SR; perciò sarà come il rettilineo KAB al rettilineo LCD, così il rettilineo MF all' altro SR. Ma si è supposto che il rettilineo KAB stia all' altro LCD, come il rettilineo MF all' altro NH; perciò il rettilineo MF sta al rettilineo NH, come lo stesso MF all' altro SR. Per lo che serbando il rettilineo MF a ciascuno degli altri NH, SR la stessa ragione, sarà il rettilineo NH uguale all' altro SR [9. V.]. Ma gli è anche simile e similmente posto; adunque GH è uguale a PR. E poichè come AB a CD, così sta EF a PR, e che PR è uguale a GH; sarà perciò come AB a CD, così EF a GH

Se dunque quattro linee rette *ec.* — *C.B.D.* [*V. N.*]

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

I parallelogrammi equiangoli hanno tra loro una ragione composta dalle ragioni de' loro lati.

Sieno i parallegrammi equiangoli AC, CF [*fig.* 162.], che abbiano l'angolo BCD uguale all' angolo ECG : dico che il parallelogrammo AC stia all' altro CF in una ragione composta dalle ragioni di BC a CG, e di DC a CE.

Pongasi BC per diritto con CG, sarà anche DC per diritto con CE [14. I.]; si compisca il parallelogrammo DG. Ciò posto, si esponga una qualunque linea retta K, e poi si faccia come BC a CG, così K ad L, e come DC a CE, così L ad M [12. VI.]; saranno le ragioni di K ad L, e di L ad M le stesse che quelle de' lati, cioè di BC a CG, e di DC a CE. Ma la ragione di K ad M è composta dalla ragione di K ad L, e dall' altra di L ad M [*def.*A.V.]; perciò K ad M ha una ragione composta dalle ragioni de' lati. Or siccome sta come BC a CG, così il parallelogrammo AC all'altro CH [1.VI.], e come BC a CG, così K ad L; perciò come K ad L, così starà il parallelogrammo AC all'altro CH [11.V.]. Similmente poichè come DC a CE, così sta il parallelogrammo CH all' altro CF, e come DC a CE, così sta L ad M; perciò come L ad M, così starà il parallelogrammo CH all'altro CF. Per lo che essendosi già dimostrato esser K ad L, come il parallelogrammo AC all'altro CH; per equalità, come K ad M, così starà il parallelogrammo AC al parallelogrammo CF [22. V.] : è poi la ragione di K ad M è composta da quelle de' lati; laonde sarà anche il parallelogrammo AC all' altro CF in ragion composta dalle ragioni de' loro lati.

E perciò i parallelogrammi *ec.* — *C.B.D.* [*V. N.*]

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

I parallelogrammi, che sono dintorno al diametro di ogni parallelogrammo, sono simili al tutto, e tra loro.

Sia il parallelogrammo ABCD [*fig.*163.], il cui diametro sia AC, ed intorno al diametro AC sieno i parallelogrammi EG, HK: dico che questi parallelogrammi EG, HK sieno simili a tutto ABCD, e tra loro.

Poichè le DC, GF sono parallele, sarà l'angolo ADC uguale all'angolo AGF [29 I.]: e per la stessa ragione, essendo parallele le BC, EF, sarà l'angolo ABC uguale all' altro AEF: ma l'uno, e l'altro degli angoli BCD, EFG, è uguale all' opposto DAB [34. I.]; perciò essi sono anche tra loro uguali; laonde i parallelogrammi ABCD, AEFG sono equiangoli. Or poichè l'angolo ABC è uguale all'angolo AEF, e l'angolo BAC è comune a' due triangoli BAC, EAF; perciò questi saranno equiangoli tra loro [32. I.]; e quindi come AB a BC, così sta AE ad EF [4. VI.]. Ma i lati opposti de' parallelogrammi sono uguali [34. I.]; perciò sarà anche AB ad AD, come AE ad AG; DC a CB, come GF ad FE; e CD a DA, come FG a GA. Adunque ne' parallelogrammi ABCD, ed AEFG sono proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali: laonde il parallelogrammo ABCD è simile all' altro AEFG [*def.* 1.VI.]. Per la stessa ragione il parallelogrammo ABCD è simile al parallelogrammo FHCK; quindi ciascuno de' due parallelogrammi EG, KH è simile allo stesso parallelogrammo ABCD: ma que' rettilinei, che sono simili ad uno stesso rettilineo, sono anche simili tra loro [21. VI.]; laonde il parallelogrammo EG è simile all' altro KH.

E perciò i parallelogrammi *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*].

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Costituire un rettilineo simile ad un dato, ed uguale ad un altro dato.

Sia dato il rettilineo ABC [*fig.* 164.], cui bisogna costituire un altro simile, e D sia quello al quale questo dev' essere uguale: fa d' uopo costituire un rettilineo simile ad ABC, ed uguale a D.

Si applichi alla linea retta BC il parallelogrammo BE uguale al rettilineo ABC [*cor.* 45. I.]; e poi alla linea retta CE, e nell' angolo FCE, che sia uguale a CBL, si applichi il parallelogrammo EF uguale al rettilineo D; sarà BC per diritto con CF, ed LE con EM. Si trovi tra le BC, CF la media proporzionale GH [13. VI.], dalla quale si descriva il rettilineo KGH simile, e similmente posto al rettilineo ABC [18.VI.].

E poichè BC sta a GH, come GH, a CF; e se tre linee rette sono proporzionali, come la prima alla terza, così sta una figura rettilinea, che si descrive dalla prima all'altra simile, e similmente posta, che si descrive dalla seconda [*cor.*2.20.VI.]: perciò come BC a CF, così starà il rettilineo ABC al rettilineo KGH. Ma come BC a CF, così sta il parallelogrammo BE all' altro EF[1.VI.], adunque come il rettilineo ABC all' altro KGH, così sta il parallelogrammo BE all' altro EF. Per la qual cosa essendo il rettilineo ABC uguale al parallelogrammo BE, sarà anche il rettilineo KGH uguale al parallelogrammo EF, [14. V.]. Ma il parallelogrammo EF è uguale al rettilineo D; adunque anche il rettilineo KGH sarà uguale all' altro D: ed è poi esso KGH simile al rettilineo ABC.

Perciò si è costituito un rettilineo simile al dato ABC, ed uguale all' altro dato D. — *C.B.F.* [*V.N.*]

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Se da un parallelogrammo si tolga un altro parallelogrammo simile, e similmente posto al tutto, che abbia con esso un angolo comune; consisterà quello col tutto dintorno al diametro stesso.

Dal parallelogrammo ABCD [*fig.* 165.] si tolga il parallelogrammo AEFG simile, e similmente posto ad ABCD, e che abbia comune con esso l'angolo BAD: dico che il parallelogrammo ABCD consista coll'altro AF intorno al diametro stesso.

Imperciocchè non vi stia; ma, s'è possibile, sia AHC il diametro di ABCD, e GF incontri AHC nel punto H, per lo quale si tiri ad AD, o a BC la parallela HK [31. I.]. Or consistendo il parallelogrammo ABCD coll'altro KG intorno al diametro stesso; sarà il parallelogrammo ABCD simile all'altro KG [24.VI.]; e perciò DA sta ad AB, come GA ad AK [*def.*1. VI.]: ma per la similitudine de' parallelogrammi ABCD, AEFG sta DA ad AB, come GA ad AE; adunque GA sta ad AE, come GA ad AK [11. V.]. Per lo che serbando GA la stessa ragione a ciascuna delle AK, AE, sarà AE uguale ad AK [9. V.], la minore alla maggiore, il che non può essere. Quindi il parallelogrammo ABCD non consiste dintorno allo stesso diametro col parallelogrammo AKHG; e perciò sarà quello dintorno allo stesso diametro con l'altro AEFG.

Adunque se da un parallelogrammo *cc.* — *C. B. D.*

N.B. Se la linea retta AB si divida comunque in E (*fig.*166.*n.*1.2.), indi si descriva dalla BE un parallelogrammo BF simile ad un dato D, e si compia l'intero parallelogrammo AC: il parallelogrammo AF si dirà *parallelogramm*

mo applicato alla linea retta AB deficiente di un parallelogrammo simile al dato D. Al contrario se la AB si fosse comunque prolungata in e, e poi dalla Be si fosse descritto il parallelogrammo Bf simile al dato D, compito l' intero parallelogrammo Af: questo si direbbe *parallelogrammo applicato alla linea retta AB eccedente di una figura parallelogramma simile alla data D.*

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

De' parallelogrammi applicati ad una medesima linea retta deficienti di figure parallelogramme simili e similmente poste a quella che si descrive dalla metà, il massimo è quello descritto dalla metà stessa, e ch' è simile al difetto.

Sia la linea retta AB [*fig.*167.*n.*1.2.], la quale dividasi per metà in C, ed alla AB si applichi un parallelogrammo AD deficiente di una figura parallelogramma simile, e similmente posta a quella che si è descritta dalla metà di essa AB, cioè dalla CB: dico che di tutti questi parallelogrammi applicati alla linea retta AB deficienti di figure parallelogramme simili e similmente poste ad essa CE, il massimo sia AD.

Imperocchè si applichi alla stessa AB l' altro parallelogrammo AF deficiente della figura parallelogramma KH simile, e similmente posta alla CE: dico che il parallelogrammo AD sia maggiore dell' altro AF.

Primieramente la linea retta AK [*fig.*167.*n.*1.] base del parallelogrammo AF sia maggiore di AC. Ed essendo il parallelogrammo CE simile all' altro KH, consisteranno dintorno al diametro stesso [26.VI.]. Si tiri perciò il loro diametro DB, e si compisca la figura. Or essendo CF uguale ad FE [43.I.]; aggiunto di comune KH, sarà tutto CH uguale a tutto KE: ma CH è uguale a CG, mentre la linea retta AC è uguale all'altra CB [36.I.]; laonde sarà anche CG uguale a KE; per cui aggiungendo di comune CF,

tutto AF sarà uguale allo gnonome LHKM ; e perciò il parallelogrammo CE, ossia AD è maggiore dell' altro AF.

In secondo luogo la linea retta AK [*fig*.167.*n*.2.] base di AF sia minore di AC : fatto lo stesso apparecchio, poichè il parallelogrammo DH è uguale all' altro DG, essendo HM uguale ad MG [36. I.]; perciò sarà DH maggiore di LG : ma DH è uguale a DK [43.I.]; perciò sarà DK maggiore di LG; ed aggiuntovi di comune AL, sarà tutto AD maggiore di tutto AF.

Che perciò di tutti i parallelogrammi *ec.— C.B.D.*

PROPOSIZIONE XXVIII.

PROBLEMA.

Applicare ad una linea retta data un parallelogrammo uguale ad un rettilineo dato, deficiente di una figura parallelogramma simile ad un' altra data; fa però d' uopo, che quel dato rettilineo cui deve essere uguale il parallelogrammo da applicarsi non sia maggiore dell' altro che applicasi alla metà della linea retta data, supposto, che i difetti di questi due parallelogrammi applicati sieno simili tra loro, ed all' altro parallelogrammo dato.

Sia data la linea retta AB [*fig*. 168.], e quel rettilineo cui bisogna applicare uno uguale nella linea retta data AB sia C, non maggiore del parallelogrammo applicato alla metà di AB, essendo le deficienze di quel parallelogrammo, e di questo simili ad un parallelogrammo dato D : si deve applicare alla linea retta data AB un parallelogrammo uguale ad un tal rettilineo, e deficiente di una figura parallelogramma simile a D.

Si divida AB per metà in E [10. I.], e dalla EB descrivasi un parallelogrammo simile e similmente posto a D, il quale sia EBFG [18.VI.], e si compisca il parallelogrammo AG.

É chiaro per la determinazione, che AG, o è uguale a C, o pur maggiore [27. VI.]. Or se AG è eguale a C, si sarà fatto ciò che proponevasi; poichè si è già applicato alla linea retta AB un parallelogrammo uguale al dato rettilineo C, e deficiente di una figura parallelogramma EF simile a D. Se poi non gli è uguale, sarà HE maggiore di C; ma HE è uguale ad EF: adunque anche EF è maggiore di C. Si costituisca il parallelogrammo KLMN simile e similmente posto a D, ed uguale all'eccesso di EF su di C [25.VI.] (*): e perchè D è simile ad EF, sarà anche KM simile ad EF [21. VI.]. Sia ora la linea retta KL omologa alla GE, e la LM alla GF. E poichè EF è uguale a C e KM insieme; sarà EF maggiore di KM, e perciò la linea retta GE è maggiore della KL, e la GF della LM. Pongasi GX uguale a KL, GO uguale ad LM, e compiscasi il parallelogrammo XGOP; sarà XO uguale e simile a KM: ma KM è simile ad EF; quindi anche XO è simile ad EF, e perciò consistono dintorno al diametro stesso [26. VI.]. Sia GPB un tal diametro, e descrivasi la figura. E poichè EF è uguale a C, e KM insieme; ed XO è uguale a KM, sarà il rimanente gnomone XSRO uguale al rimanente rettilineo C. Or essendo OR uguale ad EP [43. I.], aggiuntovi di comune SR, tutto OB è uguale a tutto XB: ma XB è uguale a TE [36. I.]; poichè il lato AE è uguale al lato EB. Adunque anche TE è uguale ad OB: aggiuntovi di comune PE, sarà tutto TS uguale allo gnomone XSRO, che si è dimostrato uguale a C. Laonde anche TS sarà uguale a C

E perciò si è applicato alla linea retta AB il parallelogrammo TS uguale alla figura rettilinea C, deficiente del parallelogrammo SR simile all' altro dato D, mentre SR è simile ad EF [24. VI.] — *C.B.F.* [*V.N.*].

(*) Si riscontri per questo luogo la nota corrispondente.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Applicare ad una linea retta data un parallelogrammo uguale ad un rettilineo dato, eccedente di una figura parallelogramma simile ad un' altra data.

Sia data la linea retta AB [*fig*. 169.], e sia C il rettilineo cui bisogna applicar l'uguale nella AB; quello poi cui deve esser simile l'eccesso sia D: bisogna applicare alla AB un parallelogrammo uguale al dato rettilineo C, eccedente di una figura parallelogramma simile a D.

Si divida la AB per metà in E; dalla EB descrivasi il parallelogrammo EL simile, e similmente posto a D [18. VI.]; e poi si costituisca l'altro parallelogrammo GH simile, e similmente posto a D, ed uguale ad EL e C insieme [25. VI.] (*). È dunque GH simile ad EL [21. VI.], e sia in essi il lato KH omologo al lato FL, e KG ad FE. E poichè il parallelogrammo GH è maggiore del parallelogrammo EL, sarà la linea retta KH maggiore di FL, e KG maggiore FE: si prolunghino le FL, FE, e sia FLM uguale a KH, ed FEN uguale a KG; poi compiscasi il parallelogrammo MN, il quale sarà uguale ad GG: ma GH è simile ad EL; quindi anche MN sarà simile ad FL; e perciò MN ed EL consistono dintorno al diametro stesso [26. VI.]. Si tiri questo loro diametro comune FBX, e descrivasi la figura. E poichè GH è uguale ad MN, sarà anche MN uguale ad EL e C; per lo che toltone di comune EL, il rimanente gnomone LOPE è uguale a C. Or perchè AE è uguale ad EB, il parallelogrammo AN è uguale al parallelogram-

(*) Si vegga la nota corrispondente a questo luogo.

mo NB [36.I.], cioè ad LO [43. I.]: quindi se aggiungavisi di comune EX, sarà tutto AX uguale allo gnomone LOPE: ma questo gnomone è uguale a C. Laonde anche AX sarà uguale a C.

E perciò si è applicato alla data linea retta AB il parallelogrammo AX uguale al dato rettilineo C, eccedente del parallelogrammo PO ch' è simile a D; mentre PO è simile ad EL [24. VI.] — *C.B.F.* [*V. N.*].

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

Dividere una data linea retta terminata in estrema, e media ragione.

Sia data la linea retta terminata AB [*fig.* 170.*n.*1.2.]: fa d' uopo dividerla in estrema, e media ragione.

Descrivasi dalla linea retta AC il quadrato CB [46. I.], e poi si applichi alla AC un parallelogrammo CD uguale a BC, eccedente di una figura AD simile a BC [29. VI.]: che perciò un tal eccesso AD sarà un quadrato al pari di BC. E poichè BC è uguale a CD, togliendone di comune CE, sarà il rimanente BF uguale al rimanente AD: gli è pure equiangolo; adunque i lati di essi BF, AD che sono dintorno agli angoli uguali, saranno reciprocamente proporzionali [14. VI.]; e perciò come FE ad ED, così sta AE ad EB. Ma FE è uguale ad AC, ossia ad AB, ed ED ad AE [34. I.]; quindi come BA ad AE, così sta AE ad EB: ed è AB maggiore di AE; onde anche AE è maggiore di EB [14. V.]. Adunque la linea retta AB resta divisa in estrema, e media ragione in E [*def.* 3. VI.].

Laonde si è divisa la linea retta data AB in estrema, e media ragione in E — *C. B. F.* [*V. N.*]

ALITER.

Sia data la linea retta AB [*fig.* 170. *n.* 2.]; fa d'uopo dividerla in estrema e media ragione.

Si divida la AB in C, in modo che il rettangolo contenuto dalle AB, BC sia uguale al quadrato della AC [11.II.].

Ed essendo il rettangolo di AB in BC uguale al quadrato della AC, sarà BA ad AC, come AC a CB [17. VI.].

Quindi la linea retta AB si è divisa in estrema e media ragione nel punto C. — *C.B.F.*

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

Ne' triangoli rettangoli, la figura rettilinea che descrivesi dal lato che sottende l'angolo retto, è uguale alle simili e similmente descritte da' lati, che contengono un tal angolo.

Sia il triangolo rettangolo ABC [*fig.* 171.], che ha retto l'angolo BAC: dico che la figura rettilinea che si descrive dal lato BC, sia uguale alle simili e similmente poste, che descrivonsi da' lati BA, AC.

Si tiri la perpendicolare AD. E poichè nel triangolo rettangolo ABC, dall'angolo retto ch'è in A si è tirata alla base BC la perpendicolare AD, sarà CB a BA, come BA a BD [*cor.*8.VI.]. Il perchè essendo queste tre linee rette proporzionali, starà come la prima alla terza, così una figura descritta dalla prima alla simile e similmente descritta dalla seconda [*cor.*2.20. VI.]; e perciò come CB a BD, così starà una figura descritta dalla CB alla simile e similmente descritta dalla BA: ed invertendo starà DB a BC, come la figura descritta da BA a quella che descrivesi da BC. Per la stessa ragione, come DC a CB, così sta la figura che si descrive dalla AC a quella che si descrive dalla CB. Laonde le BD, DC staranno alla BC, come le figure de-

scritte dalle BA, AC a quella che si descrive dalla BC, essendo esse simili e similmente poste. Ma la BC è uguale alle BD, DC; adunque anche la figura che si descrive dalla BC è uguale alle simili e similmente descritte dalle BA, AC.

E perciò ne' triangoli ec — *C.B.D.* [*V.N.*].

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

Se due triangoli, i quali hanno due lati proporzionali con due lati, componendosi cogli angoli adjacenti alle loro basi, abbiano i lati omologhi paralleli; esse basi giaceranno per diritto.

Sieno i due triangoli ABC, DCE [*fig.* 172.], i quali abbiano i due lati BA, AC proporzionali co' due altri CD, DE, in modo tale che sia BA ad AC, come CD a DE; e sia inoltre la AB parallela alla DC, e la AC alla DE: dico che la BC stia per diritto con la CE.

Poichè la AB è parallela alla DC, e cade in esse la AC; saranno uguali tra loro gli angoli BAC, ACD [29. I.]. Per la stessa ragione anche l'angolo CDE è uguale all'angolo ACD; sarà dunque l'angolo BAC uguale all'altro CDE. Or i due triangoli ABC, DCE, avendo l'angolo ch'è in A uguale a quello ch'è in D, e proporzionali i lati dintorno a questi angoli uguali; poichè BA sta ad AC, come CD a DE; sarà il triangolo ABC equiangolo al triangolo DCE [6. VI.]; e quindi l'angolo ABC è uguale all'angolo DCE. Si è anche dimostrato l'angolo ACD uguale all'angolo BAC; perciò tutto l'angolo ACE è uguale a' due ABC, BAC: si aggiunga di comune ACB; saranno gli angoli ACE, ACB uguali agli altri BAC, ACB, CBA: ma gli angoli BAC, ACB, CBA fanno due retti [32.I.]; quindi anche gli angoli ACE, ACB saranno uguali a due retti Laonde ad una linea retta AC, e nel punto C in essa, le due

linee rette BC, CE facendo, non alla parte stessa, gli angoli ACE, ACB uguali a due retti; sarà BC per diritto con CE [14. I.].

E perciò se due triangoli *ec.* — *C.B.D.* [*V.N.*].

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali, gli angoli hanno la stessa ragione degli archi su i quali insistono, siano essi a' centri, o alle circonferenze. Ed è questa anche la ragione de' settori.

Sieno i cerchi uguali ABC, DEF [*fig.* 173.]; e gli angoli BGC, EHF stiano a' loro centri, gli altri BAC, EDF alle circonferenze: dico che come sta l' arco BC all' arco EF, così stia l' angolo BGC all' altro EHF, e l' angolo BAC all' altro EDF: e che nella stessa ragione stia pure il settore GBC al settore HEF.

Pongansi uguali all' arco BC quanti si vogliano archi successivi CK, KL; e similmente all' arco EF si facciano uguali gli altri FM, MN quanti si vuole, e giungansi le GK, GL, HM, HN. E poichè sono uguali gli archi BC, CK, KL, anche gli angoli BGC, CGK, KGL saranno uguali [27 III.]; e perciò quanto è multiplice l' arco BL dell' arco BC, altrettanto l' angolo BGL l' è dell' angolo BGC. Per la stessa ragione quanto è multiplice l' arco EN dell' arco EF, altrettanto l' angolo EHN l' è dell' angolo EHF. Or è chiaro che se l' arco BL è uguale all' arco EN, l' angolo BGL sarà uguale all' angolo EHN; se l' arco BL è maggiore dell' arco EN, l' angolo BGL sarà maggiore dell' angolo EHN; e se minore, minore. Vi sono dunque quattro grandezze, cioè i due archi BC, EF, ed i due angoli BGC, EHF; e si sono presi gli ugualmente multiplici dell' arco BC e dell' angolo BGC, cioè l' arco BL e l' angolo

BGL; e dell' arco EF e del angolo EHF, si sono anche presi altri ugualmente multiplici, che sono l'arco EN e l'angolo EHN: e si è dimostrato che se l'arco EL è maggiore dell'arco EN, l'angolo BGL sia anche maggiore dell'angolo EHN; e se uguale, uguale; se minore, minore. Adunque deve stare l'arco BC all' altro EF, come l'angolo BGC all' angolo EHF [*def.*5. V.]. Ma l'angolo BGC sta all'angolo EHF, come l'angolo BAC all'angolo EDF; poichè ciascuno de' due primi è doppio del corrispondente degli altri due [15. V.]; perciò come l'arco BC all' altro EF, così sta l'angolo BGC all' angolo EHF, e l'angolo BAC all'angolo EDF [11. V.].

Laonde ne' cerchi uguali gli angoli hanno la stessa ragione degli archi su i quali insistono, siano essi ai centri, o alle circonferenze.

Dico di più, che come l'arco BC all' arco EF, così stia il settore GBC al settore HEF.

Giungansi le BC, CK; e poi presi negli archi BC, CK i punti X, O, si uniscano le BX, XC, CO, OK. E poichè le due BG, GC sono uguali alle due CG, GK, e contengono angoli uguali; sarà anche la base BC uguale alla base CK, ed il triangolo GBC uguale al triangolo GCK [4. I.]. Or essendo l'arco BC uguale all' arco CK, sarà l'altro arco che rimane per compiere l' intera circonferenza ABC togliendone BC uguale a quello che rimane per compiere la stessa circonferenza, se da essa si tolga CK; perciò anche l'angolo BXC è uguale all' angolo COK [27. III.]; e quindi la porzione BXC è simile all' altra COK [*def.*11. III.]: ma sono costituite sulle linee rette uguali BC, CK; e le porzioni simili di cerchio, che sono costituite su di linee rette uguali, sono anche uguali tra loro [24. III.]. Adunque la porzione BXC è uguale all' altra COK. È poi altresì il triangolo BGC uguale al triangolo CGK; quindi tutto il settore GBC sarà uguale a tutto il settore GCK. Per la stessa ragione il settore GKL è uguale a ciascuno degli altri GBC, GCK: laonde i tre settori GBC, GCK, GKL sono tra loro uguali. Similmente si dimostreranno uguali tra loro i settori HEF, HFM, HMN; e perciò quanto l' arco BL è mul-

tiplice dell' arco BC, altrettanto il settore GBL l'è del settore GBC: e nel modo stesso si dimostra, che quanto l' arco EN è multiplice dell' arco EF, altrettanto il settore HEN l'è del settore HEF. Or è chiaro, che se l'arco BL è uguale all'arco EN, il settore GBL è uguale al settore HEN; se l' arco BL è maggiore dell' arco EN, anche il settore GBL è maggiore dell' altro HEN; e se minore, minore. Vi sono perciò quattro grandezze, cioè i due archi BC, EF, ed i due settori GBC, HEF; e si sono presi dell' arco BC e del settore GBC gli ugualmente multiplici, che sono l' arco BL e 'l settore GBL; come pure dell' arco EF e del settore HEF si sono presi altri ugualmente multiplici, che sono l' arco EN e 'l settore HEN: e si è dimostrato, che se l' arco BL è maggiore dell' arco EN, anche il settore GBL è maggiore del settore HEN; che se è uguale, gli sia uguale; e se minore, minore: perciò dovrà stare l' arco BC all' arco EF, come il settore GBC al settore HEF [*def.*5.V.] — *C.B.D.* [*V.N.*].

Corollario

È anche chiaro, che come il settore al settore, così stia l'angolo all' angolo [11. V.].

FINE DEL SESTO LIBRO.

I seguenti Teoremi non sono di Euclide, ma aggiunti dal Simson al VI. degli Elementi [*V.N.*].

PROPOSIZIONE A.

TEOREMA.

Se prolungato un lato di un triangolo, si divida per metà l' angolo esteriore, e la retta che divide l' angolo seghi la base prolungata; i segmenti di questa base prolungata, che sono tra i suoi estremi, e l' incontro di essa con quella segante, avranno tra loro la stessa ragione, che i rimanenti lati del triangolo. E se que' segmenti della base prolungata abbiano la stessa ragione, che i rimanenti lati del triangolo; la retta condotta dal vertice alla sezione dividerà per metà l'angolo esteriore del triangolo.

Sia BAC un triangolo, in cui il lato BA [*fig. A.*] sia prolungato in F, e la retta DAG che divide per metà l' angolo esteriore CAF incontri la base BC in D: dico che dovrà stare BD a DC come BA ad AC.

Tirisi la CE parallela alla AD [31. I.], e sarà l' angolo DAF uguale all' angolo CEA, e l' angolo CAD uguale all' angolo ACE [29. I.]; laonde si rileverà, che sia l'angolo AEC uguale all' angolo ACE, e quindi AE uguale ad AC [6.I.]. Ma essendo CE parallela ad AD deve stare, componendo, BD a DC, come BA ad AE [2. VI.]; ed è AE uguale ad AC: quindi starà BD a DC, come BA ad AC.

Sia adesso BD a DC, come BA ad AC, e giungasi la retta DAG: dico che l'angolo CAD sia uguale all'angolo DAF.

Fatta la stessa costruzione: perchè BD sta a DC, come BA ad AC; e sta pure BD a DC, come BA ad AE [2.VI.];

perciò starà BA ad AC, come BA ad AE [11. V.]; ed AC sarà uguale ad AE [9. V.]; che perciò l'angolo AEC sarà uguale all'angolo ACE: ma l'angolo AEC è uguale all'angolo FAD [29. I.], e l'angolo ACE all'altro CAD; adunque sarà l'angolo FAD uguale all'angolo CAD.

Laonde se prolungato *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE B.

TEOREMA.

Se dividasi per metà l'angolo di un triangolo, e che questa segante divida anche la base; il rettangolo contenuto da' lati del triangolo sarà uguale al rettangolo contenuto da' segmenti della base, insieme col quadrato della linea retta che divide l'angolo per metà.

Sia il triangolo ABC [*fig. B.*], il cui angolo BAC dividasi per metà con la linea retta AD: dico che il rettangolo di BA in AC sia uguale al rettangolo di BD in DC, insieme col quadrato di AD.

Si circonscriva il cerchio ACB al triangolo proposto [5.IV.], prolunghisi la AD fino alla circonferenza in E, e si giunga la EC. E poichè l'angolo BAD è uguale all'angolo CAE, e l'angolo ABD all'angolo AEC, essendo questi due ultimi nello stesso segmento [21. III.]; perciò i triangoli ABD, AEC saranno equiangoli, e quindi simili [4. VI.]. Laonde starà BA ad AD, come EA ad AC [*def.* 1. VI.]; ed il rettangolo di BA in AC sarà uguale a quello di EA in AD [16. VI.], o sia al rettangolo di ED in DA, insieme col quadrato di DA [3.II.]: ma il rettangolo di ED in DA è uguale a quello di BD in DC [36. III.], quindi il rettangolo di AB in AC è uguale al rettangolo di BD in DC, insieme col quadrato di AD *ec.*—*C.B.D.*

PROPOSIZIONE C.

TEOREMA.

Se dall' angolo di un triangolo si tiri la perpendicolare alla base; il rettangolo contenuto da' lati del triangolo sarà uguale al rettangolo contenuto dalla perpendicolare e dal diametro del cerchio circonscritto al triangolo.

Sia il triangolo ABC [*fig. C.*], e dall' angolo A si abbassi la perpendicolare AD alla base BC: dico che il rettangolo di BA in AC sia uguale al rettangolo di AD nel diametro del cerchio circonscritto al triangolo

Si corconscriva al triangolo il cerchio ACB [5. IV.]; tirisi il diametro AE, e si giunga EC. Ed essendo l' angolo retto BDA uguale all' altro ECA anche retto, perchè posto nel semicerchio [31. III.]; ed inoltre l' angolo ABD uguale all' altro AEC con cui è posto nel medesimo segmento [21. III.]; perciò i triangoli ABD, AEC saranno equiangoli, e quindi simili [4. VI.]. Laonde come BA ad AD, così sta EA ad AC; e per conseguenza il rettangolo di BA in AC è uguale a quello di EA in AD [16. VI.] *C. B. D.*

PROPOSIZIONE D.

TEOREMA.

Il rettangolo contenuto dalle diagonali di un quadrilatero inscritto nel cerchio è uguale ad ambo i rettangoli contenuti da' suoi lati opposti.

Sia ABCD [*fig. D.*] il quadrilatero inscritto in un cerchio, e giungansi le AC, DB: dico che il rettangolo di AC

in BD sia uguale a' due rettangoli di AB in CD, e di AD in BC.

Al punto B della AB si costituisca l'angolo ABE uguale all'altro DBC [23, I.]; che perciò sarà pure l'angolo ABD uguale all'angolo EBC: è poi l'angolo BDA uguale all'angolo BCE, mentre esistono nella stessa porzione di cerchio BCA [21.III.]; adunque il triangolo ABD è equiangolo all'altro BCE: perciò come BC a CE, così sta BD a DA; ed il rettangolo di BC in AD è uguale a quello di BD in CE [16. VI.]. Inoltre poichè l'angolo ABE è uguale all'angolo DBC, e l'angolo BAE all'angolo BDC, esistendo questi nella stessa porzione BADC; perciò il triangolo ABE è equiangolo al triangolo BCD: laonde BA sta ad AE, come BD a DC; ed il rettangolo di BA in DC è uguale a quello di BD in AE: ma il rettangolo di BC in AD si è dimostrato uguale a quello di BD in CE; adunque l'intero rettangolo di AC in BD è uguale al rettangolo di AB in DC, insieme coll'altro di AD in BC. — *C. B. D.*

NUOVA DIMOSTRAZIONE

DEL

POSTULATO QUINTO

DI

EUCLIDE

FONDATA SU I PRINCIPJ STESSI DA QUESTO GEOMETRA STABILITI PRIMA DELLA PROPOSIZIONE XXIX. DEL LIBRO I°. DEGLI ELEMENTI, ED ESENTE DA QUALUNQUE SUPPOSIZIONE, E DALLE NOZIONI METAFISICHE DI SITO.

IN NAPOLI

1821.

NUOVA DIMOSTRAZIONE

DEL POSTULATO QUINTO

DI EUCLIDE

1. Quantunque gli Elementi di Euclide occupino senza dubbio alcuno, come altrove dicemmo (*), il primo luogo tra i prodotti dello spirito umano, con tutto ciò essi non vanno a dirittura esenti da qualche macchia, che gli sforzi combinati di molti Geometri antichi e moderni non hanno valuto a distruggere interamente. La principale tra queste è il tanto famoso neo delle parallele, che consiste nel trovarsi Euclide assunto come quinto postulato un principio di Geometria, il quale ha bisogno di dimostrazione. Molti tentativi si sono fatti per ottenerla mediante le proposizioni stabilite da Euclide prima della 29. del Libro I; ma in verità tutti inutili, se si eccettui la dimostrazione data dall' insigne Geometra persiano Nassir-Eddin. Il Clavio, che non vide il dotto comento di questo geometra agli

(*) Discorso Preliminare.

Elementi di Euclide, del che fortemente si dolse nella sua esposizione degli Elementi stessi, vi si approssimò grandemente ne' principj della dimostrazione, ch ei diede di tal postulato; ed il sommo geometra Roberto Simson volle anch'ei intraprender due volte a ciò dimostrare, la prima nelle Note in fine del suo Euclide latino, e l'altra in quelle della versione inglese di tal suo dottissimo libro. Ma la dimostrazione del Clavio, e quelle del Simson non sono pienamente rigorose, sebbene possano diventarlo. Oltre i già detti geometri moderni, molti altri ancora si sono occupati di tale argomento; ma noi tralasciamo di quì parlarne, e solamente faremo notare, che il Castiglione geometra riputatissimo non credè indegno di occupar l'Accademia di Berlino con due sue Memorie su questo assunto, le quali si trovano inserite negli Atti di essa per gli anni 1787 e 1788: ed in queste egli nè men dà una nuova dimostrazione del postulato suddetto; ma solamente si limita ad esporre quelle del Proclo, del Nassir-Eddin, del Clavio, e del Simson. Ultimamente molto si è anche fatto su questo proposito, ed il Sig. Karsten geometra tedesco ha stampato nel 1801. a Stutgard una sua opera col titolo: *Tentamen novae parallelarum theoriae, notione situs fundatae.* Qualunque sia quest' opera, che a noi malgrado le ricerche fattene, non è riuscito vedere, e qualunque il merito delle cose che vi si contengono, indispone non poco quella clausola, che la dimostrazione del Sig. Karsten sia fondata sulle nozioni di sito, che i geometri sanno bene di quale difficoltà di concetto sieno, e come conducano insensibilmente le Matematiche in una metafisica oscura e tenebrosa, che al chiaro e lampante cammino di quelle scienze non si conviene. Tralascio di di-

re di tanti altri che si sono occupati di questo stesso argomento importantissimo alla perfezione degli Elementi di Geometria, e con poco successo, per passare ad esporre una nostra dimostrazione di tal postulato, esente, come crediamo, da qualsivoglia supposizione, e fatta con tutto il rigor geometrico, valendoci di que' soli principj Euclidei, che precedono la 29. del Lib. I., ed a questa nostra dimostrazione abbiamo dovuto far precedere quella del Proclo; poichè è de' principj stessi di questo, che ci siamo valuti dimostrandoli.

Dopo ciò abbiamo creduto importante pe' giovani il far loro rilevare, quanto male a proposito molti abbiano creduto di evitare il sopraddetto neo, cambiando la giusta definizione delle parallele data da Euclide; e di passaggio si è anche indicata qualche cosa, che il Castiglione dice nella fine della sua seconda Memoria, volendo distruggere dalle fondamenta un tal neo negli Elementi, coll' annullare il postulato V°., ch' egli non più ad Euclide attribuisce, non vedendone la necessità per la dimostrazione della teorica diretta delle parallele; ma a qualche poco cauto amanuense, o men dotto Geometra.

Altra volta avevamo anche quí recato la dimostrazione del Nassir-Eddin come difficile ad incontrarsi, e quelle del Clavio e del Simson accomodate al rigor geometrico; ma essendo ora mancato quest' oggetto, potendo chiunque desidera vederle ricorrere ad un primo volume delle nostre edizioni VI e VII. del presente Corso, o pure al nostro Euclide in 4°. stampato nel 1818; abbiamo perciò creduto conveniente di non gravarne la presente edizione.

DIMOSTRAZIONE DI PROCLO.

2. Questo geometra, che tra gli antichi ci ha dato lo più plausibile comento al Postulato V°. assume per vero il seguente principio ricevuto com' evidente anche da Aristotele.

Prolungandosi indefinitamente i lati di un angolo rettilineo; la loro distanza dee farsi maggiore di qualunque linea retta data.

per mezzo del quale dimostra i seguenti teoremi.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

3. Se una linea retta sega l'una di due linee rette parallele, segherà anche l' altra.

Sieno AB, CD [*fig.* 1.] due linee rette parallele, e l' altra linea retta EFG seghi la AB; dovrà segare anche la CD. Imperocchè se i lati dell' angolo rettilineo GFB si prolunghino indefinitamente; la loro distanza dovendo farsi maggiore di quella delle AB, CD, che sono equidistanti, perchè parallele, dovrà perciò la EFG segare la CD. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

4. Se in due linee rette giacenti in un piano cada un' altra linea retta, e formi con quelle gli angoli interiori dalle parti stesse minori di due retti; quelle due linee rette prolungate indefinitamente debbono incontrarsi da quella parte dove gli angoli sono minori di due retti.

Sieno le linee rette AB, FD [*fig.* 2.] segate dall' altra EFH, che faccia con queste gli angoli interiori dalle parti stesse BEF, EFD minori di due retti. Si costituisca alla linea retta FH, e nel punto F in essa l'angolo GFH uguale all' interiore ed opposto dalle medesime parti BEF; saranno perciò parallele le EB, FG [28. I.]. Or essendo gli angoli HFG, GFE, insieme presi, uguali a due retti [13. I.]; perciò anche gli angoli BEF, EFG saranno uguali a due retti: ma gli angoli BEF EFD sono minori di due retti; quindi l' angolo EFG è maggiore dell' altro EFD. Laonde FD cade tra le parallele EB, FG, e sega la FG; adunque dovrà segare anche la AB, se si produca indefinitamente [*prop. prec.*], cioè converrà con la EB. — *C.D.D.*

SCOLIO.

5. Questa dimostrazione di Proclo non è piaciuta a molti geometri moderni; poichè fondata sopra un principio anche assunto, e che presentava per la sua dimostrazione una difficoltà pari a quella del Postulato V°., e molti altri anche più rigorosi gli hanno objettato, ch' egli assuma nella sua dimostrazione, che due linee rette parallele sieno equidistanti, o sia che tutte le

perpendicolari che si abbassano da' punti dell' una sull' altra sieno tutte uguali: il che è incerto, non potendo derivarsi nè dalla definizione delle parallele, nè dalle Proposizioni 27. e 28. Ciò posto, essi dicono, che potrebbe dubitarsi, che la distanza delle parallele andasse successivamente crescendo più che non cresce la distanza de' lati di quell' angolo che si comprende da una di esse con un' altra linea retta che l' intersega; e quindi che mai questa possa incontrare l' altra di tali parallele. Si sarebbe inoltre voluto, che Proclo avesse definito ciò che s'intende per distanza de' lati di un angolo rettilineo. Or il seguente nostro comento al postulato V°. mostrerà, che i principj da Proclo assunti sieno tutti dimostrabili, per mezzo delle verità stabilite da Euclide prima della 29; e quindi che ciò ch' egli ha detto, lungi dal condannarsi come insufficiente, come il Borelli (*), e molti altri hanno fatto, poteva servir di base a stabilire un buona teorica delle parallele.

(*) *Quapropter Procli demonstratio insufficiens erit*: è così che si esprime il Borelli in fine dello Scol. della Prop. 16. del Libro I. del suo *Euclides Restitutus*.

DIMOSTRAZIONE NOSTRA.

6. *Def.* 1. Per *distanza di un punto da una linea retta* s'intende la perpendicolare abbassata da quel punto su questa linea retta.

7. *Def.* 2. Se abbassando da qualsivogliano punti di una linea retta le perpendicolari sopra di un'altra linea retta, queste si trovino continuamente decrescere verso una stessa parte, e crescere al contrario verso l'opposta; quelle due linee rette si diranno *convergenti* verso la parte ove le perpendicolari decrescono, e *divergenti* dall'altra parte ove crescono.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

8. Se la perpendicolare ad una linea retta incontri un'altra linea retta ad angoli uno acuto, e l'altro ottuso; tali due linee rette saranno convergenti dalla parte ove si trova l'angolo acuto, e divergenti dalla parte ov'è l'angolo ottuso.

Sieno AB, CD [*fig.* 3.] due linee rette, e la perpendicolare AC alla AB incontri la CD ad angoli uno acuto ACD e l'altro ottuso AC*d*: dico che le AB, CD convergano verso la parte BD, e divergano dalla parte opposta, cioè che le altre perpendicolari FE, HG alla AB dalla parte BD ov'è l'angolo acuto ACD vanno successivamente decrescendo, in modo che la AC è maggiore della FE, la FE della HG, e così in seguito; e che al contrario vanno crescendo successivamente le perpendico-

lari *ef*, *gh* alla AB dalla parte ov'è l'angolo ottuso AC*d*; talchè la AC è minore della *fe*, la *fe* della *hg*, e così sempre.

Dal punto A si tiri alla CD la perpendicolare AE, che dovrà cadere da quella parte ov'è l'angolo acuto ACD [17.I.]; poi dal punto E tirisi la EF perpendicolare alla AB. E poichè nel triangolo AEC l'angolo AEC è retto, e quello in C acuto, sarà la AC maggiore della AE [19. I.]. Ma la AE è maggiore della EF; poichè l'angolo EAF è necessariamente acuto, essendo parte del retto CAF. Adunque la AC è maggiore della EF. Or essendo retto l'angolo AEG, l'altro FEG è acuto: che perciò si potrà dimostrare come poc'anzi, che abbassandosi da F sopra la CD la perpendicolare FG, e da G sopra la AB la perpendicolare GH, sia la EF maggiore della GH. Laonde molto più la AC sarà maggiore della GH: e così in appresso.

Si prenda adesso tra i punti C, E [*fig.* 4.] un qualunque altro punto K, dal quale si tiri alla AB la perpendicolare KL, che dovrà incontrare la AB tra i punti A, F; altrimenti dovrebbe intersegare una delle due CA, EF, e si verificherebbe perciò, che da tal punto d'intersezione si sarebbero tirate due perpendicolari alla AB. Giungasi la AK. E poichè nel triangolo AEK è retto l'angolo KEA; perciò l'esterno CKA sarà ottuso [16. I.]; e quindi la CA maggiore della AK [19.I.]: ma la AK è maggiore della KL; adunque la AC è maggiore della KL. Similmente si dimostra essere la KL maggiore della EF, e così in appresso. Laonde le due linee rette AB, CD convergeranno dalle parti B D ove si trova l'angolo acuto ACD.

E sarà facile il ravvisar dopo ciò, come possa dimostrarsi la seconda parte del presente teorema, cioè quella ove vuol provarsi, che tali linee rette divergano dalla parte opposta, ov'è l'angolo ottuso AC*d* conseguente di ACD.

COROLLARIO I.

9. Quindi se elevinsi ad una linea retta AB [*fig.* 5.] due perpendicolari uguali AC, BE; la congiungente CE gli altri estremi di queste dovrà far con esse retti gli angoli

ACE, BEC. Imperocchè altrimenti se l'angolo in C fosse acuto, o ottuso, la BE dovrebbe esser minore della AC, o pur maggiore: ed al contrario sarebbe la AC minore o pur maggiore della BE, se l'angolo BEC si supponesse acuto, o ottuso.

COROLLARIO II.

10. Inoltre se suppongasi, che le perpendicolari AC, BE ad una linea retta comprendano angoli retti colla congiungente CE de' loro estremi C, E; tali perpendicolari dovranno essere uguali: poichè altrimenti supponendosi disuguali, ed AC la maggiore; tagliata dalla AC la AD uguale alla BE, e congiunta la DE, l'angolo CDE sarebbe retto; che perciò nel triangolo CDE vi sarebbero due angoli retti; lo che ripugna.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

11. Se due perpendicolari ad una linea retta indefinita, protungate finchè incontrino un' altra linea retta, sieno disuguali; quest' altra linea retta comprenderà un angolo acuto con ciascuna delle perpendicolari, verso quella parte ov' è la minore di esse.

Le perpendicolari AC, FE [*fig.* 3.] alla AB, prodotte fino alla CD, sieno disuguali, e sia AC la maggiore, dalla quale si tagli la AK uguale alla minore FE, e giungasi KE: dovrà esser retto l'angolo in K; e perciò nel triangolo KCE, essendo retto l'angolo in K, l'altro in C sarà acuto. Ed inoltre essendo retto l'angolo FEK, l'altro FEC sarà ottuso, e quindi acuto il suo conseguente FED. Laonde ec. — *C.B.D.*

COROLLARIO.

12. Dal presente teorema converso del precedente si rile-

va, che elevandosi alla AB [*fig.* 5.] le due perpendicolari uguali AC, BE, la congiungente CE i loro estremi C, E debba essere uguale alla AB. Poichè se CE fosse maggiore della AB, essendo entrambe le AB, CE perpendicolari alla AC, l'angolo CEB dovrebbe essere acuto; e sarebbe acuto quello in B, se si supponesse la AB maggiore della CE: e l'una e l'altra cosa ripugna; poichè quest' angolo ABE è retto per supposizione, e l'altro BEC l'è per lo Cor. 1. della Prop. 1.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

13. Se ad una linea retta indefinita si elevino due perpendicolari uguali; l'altra linea retta indefinita condotta per gli estremi di queste, sarà equidistante da quella prima linea retta: cioè tutte le perpendicolari che da' punti di quella si abbasseranno su questa saranno quanto le perpendicolari da principio elevate.

Sieno AC, BD [*fig.* 6.] le due perpendicolari uguali elevate sulla AB; e CD la retta che passa pe' loro estremi C, D: e s' è possibile la FE elevata perpendicolarmente alla AB dal punto F, e prolungata fino alla CD, non uguagli la AC. Si prenda sulla FE la FH uguale ad AC, e giungasi la CH. E poichè la AC è uguale alla FH, e sono entrambe perpendicolari alla AB, dovrà esser retto l'angolo ACH. Ma è anche retto l'altro ACD, mentre le perpendicolari AC, BD si sono supposte uguali. Adunque la CH dovrà coincidere colla CD; e quindi il punto H dovrà cadere necessariamente in E. — *C.B.D.*

ALITER.

14. Sia la AC disuguale alla FE, e si prenda in questa la FH uguale alla AC; congiunta la CH, l'angolo CHF sarà ret-

to [*cas.* 1.*pr.*1.]. Similmente congiunta la AD, l'altro angolo FHD sarà anche retto. Laonde essendo retti gli angoli FHD, FHC, le linee rette HC, HD saranno per diritto [14. I.]; e perciò le due linee rette CED, CHD chiuderebbero spazio.

COROLLARIO.

15. Essendo la EF uguale alla AC, l'angolo FEC sarà retto.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

16. Due linee rette perpendicolari ad una stessa linea retta, sono equidistanti: ed ogni perpendicolare ad una di esse è anche perpendicolare all'altra.

Sieno le AC, BE [*fig.* 5.] perpendicolari alla stessa AB, e si prendano in esse le AC, BE uguali; congiunta la CE dovrà questa essere uguale alla AB, e perpendicolare alle AC, BE. Laonde per la Proposizione precedente, e pel suo Corollario, essendosi elevate sulla AC le due perpendicolari uguali AB, CE, la congiungente BE dovrà essere equidistante dalla AC, ed ogni perpendicolare alla AC sarà anche perpendicolare alla BE.—*C.B.D.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

17. Due linee rette che segate da una terza comprendono con questa l'angolo esteriore uguale all'interiore ed opposto dalla stessa parte, sono equidistanti.

Le due linee rette AB, CD [*fig.* 7.] segate dalla EFG

comprendano con qnesta l'angolo EFB uguale all' altro FGD : dico che quelle due linee rette sieno equidistanti.

Si divida la FG per metà in K, e dal punto K tirisi alla CD la perpendicolare KH, che si prolunghi fino alla AF in L. E poichè l'angolo EFB è uguale sì all' angolo FGD, che all' altro LFK; sarà l'angolo FGD uguale all' angolo LFK: perciò i due triangoli GHK, KLF avendo l'angolo KFL uguale all' angolo KGH, l'angolo LKF uguale all' angolo GKH, ed il lato KF uguale al lato KG; avranno anche l'angolo KLF uguale all' angolo KHG. Ma quest'angolo KHG è retto: laonde anche retto sarà l'altro KLF; e perciò la retta HL sarà perpendicolare alle due AB, CD, le quali saranno per conseguenza equidistanti [*prop. prec.*]. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

18. La distanza de' lati di un angolo può divenir sempre maggiore di qualunque linea retta data.

Sieno AB, AC [*fig.* 8.] i lati di un angolo, e nell' uno di essi AC si prenda un qualunque punto E, dal quale tirisi la EF perpendicolare alla AB; pòi si prolunghi la FE in H, finchè sia la EH uguale alla FE. Finalmente si prenda nella AC, dal punto E, la EK uguale alla AE, ed uniscasi la HK. Ed avendo i triangoli AEF, HEK uguali, l' un l'altro, i lati dintorno agli angoli uguali in E, sarà l'angolo EHK uguale all'angolo AFE, e perciò retto. Or si prenda la FG uguale alla FA, e quindi alla HK, e giungasi la KG; sarà questa KG perpendicolare alle FG, HK, ed uguale alla FH: che perciò essa KG sarà doppia della EF.

Nel modo stesso, prendendo la KM uguale alla KA, e facendo la stessa costruzione, si troverà che la ML sia perpendicolare alla AB, e doppia della KG: e così sempre.

Ciò premesso, dal punto A si elevi alla BC la perpendico-

lare indefinita AZ, ed in essa si prenda la AN uguale alla FE, la AO uguale alla GK, cioè doppia della FE, la AP uguale alla LM, o sia quadrupla della FE, e così successivamente: è chiaro, che si dovrà pervenire finalmente ad una linea retta maggiore di qualunque data AD, e la quale corrisponderà perciò ad una perpendicolare tirata da un punto preso nel lato AB dell'angolo BAC sull'altro lato AC di esso.

Adunque ec. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE VII. (*).

TEOREMA.

19. Se due linee rette giacenti in un piano, ed intersegate da una terza, comprendano con questa gli angoli interiori, dalle parti stesse, minori di due retti; quelle due linee rette, prolungandosi indefinitamente, dovranno incontrarsi da quelle parti ove gli angoli sono minori di due retti.

Sieno AB, CD [*fig.* 9.] le due linee rette, che sono intersegate dall'altra EFG, colla quale formano gli angoli BFG, FGD interiori dalle parti stesse minori di due retti. Al punto F della FE si costituisca l'angolo EFH uguale all'angolo EGD; che perciò le due linee rette FH, GD saranno equidistanti [*pr.*5.], e la loro distanza sarà quanto la perpendicolare FK, che dal punto F cade sulla CD. E perchè l'angolo EFH è uguale all'angolo FGD, aggiuntovi di comune l'angolo GFH, saranno i due angoli EFH, HFG uguali agli altri due HFG, FGD, e perciò questi del pari che quelli saranno uguali a due retti, e per conseguenza maggiori degli angoli BFG, FGD, che si sono supposti minori di due retti. Laonde toltone di comune l'angolo

(*) Postulato V.

FGD; sarà il rimanente angolo GFH maggiore di GFB; e perciò la retta FH cade al di sopra della FB; o sia che questa si ritrova tra le FH, CD. Or la distanza de' lati dell'angolo HFB potendo divenir maggiore di qualunque data [*prop. prec.*], e quindi della FK, sia L quel punto ove avviene, che la perpendicolare ML al lato FH dell'angolo HFB è maggiore di FK: è egli chiaro, che siccome le rette FL, KD hanno da per tutto la stessa distanza FK minore di ML, così il punto M dovrà cadere al di sotto della retta CD; e quindi la FM, che unisce due punti l'uno F, ch'esiste da una parte della retta CD, e l'altro M, ch'è dalla parte opposta, dovrà necessariamente intersegare la CD.

Che perciò *ec.* — *C.B.D.*

SCOLIO GENERALE.

20. Dopo di aver esposto il nostro comentario e quello di Proclo sul Postulato V°., mediante il quale esso resta dimostrato senza metafisici ragionamenti, e senza nozioni di sito, di cui taluni moderni poco curanti della purità del rigor geometrico si erano serviti; conviene ora dir qualche cosa di quegli altri Geometri, i quali hanno cercato di togliere questo neo col mutar la giusta definizione delle parallele data da Euclide, sostituendovi l'altra dell'equidistanza, ch'è impropria; poichè per mezzo di essa non si stabilirà più una teorica generale delle parallele; ma sì bene una teorica delle rette equidistanti; quando anche l'equidistanza si possa ammettere tra due rette, senza prima dimostrarla possibile ad aver luogo.

Nel numero di costoro furono tra gli antichi, al riferir di Proclo, Possidonio, Gemino, Tolomeo e Proclo stesso: fra'moderni poi moltissimi ve ne sono stati, tra i quali bisogna principalmente notare Giannalfonso Borelli, che nel suo *Euclides Restitutus*, nello Scolio della Prop. 16. Lib. I., impugna grandemente la definizione Euclidea delle parallele, perchè incomprensibile: *nam* (ecco come ei dice) *extensio illa infinita ad utramque partem absque concursu concipi non potest; neque conveniens est, ut*

a passione remota difficili, et non evidenter cognita, deducantur in propositione 27, 28, 29 aliae passiones magis manifestae; magis enim comprehensibile est posse duos angulos alternos inter se aequales esse, quam duas rectas lineas in infinitum productas ad utrasque partes non convenire, ec. Ma per verità bisogna che il Borelli, geometra di un merito distinto, non abbia colla sua solita penetrazione riflettuto su questo assunto; poichè come può trovarsi incomprensibile, che due linee rette giacenti in un piano possano avervi tal sito rispettivo, che prolungate all' infinito non s' incontrino; ed a chi mai oltre a lui, è venuto in mente, che ciò non possa essere? E chi non vede che una linea retta EG [*fig.* 1.], la quale passa per un dato punto F e s' inclina alla CD sino ad incontrarla dalle parti GD, se aggirisi dintorno a quel punto, passerà in fine ad incontrarla dalle parti E C, e poi non concepirà, che tal linea retta avrà dovuto passare per tal posizione da non incontrar mai l'altra linea retta CD da qualunque delle due parti, per quanto si supponga prodotta. Ed è certamente più comprensibile e geometrico il supporre che due linee rette giacciano in modo in un piano, che prolungate indefinitamente non s' incontrino, che non è poi l' altro concetto, che due linee rette debbano necessariamente incontrarsi, se non sono equidistanti; condizione che ha bisogno di esser dimostrata possibile a verificarsi.

21. Finalmente chiuderemo questa esposizione de' diversi tentativi de' principali Geometri per dimostrare il Post. V°. con ciò che dice il Castiglione in fine della sua Memoria sulle parallele di Euclide. Egli ci vorrebbe mostrare, che tutti questi sforzi fatti da diversi geometri sommi per ottenere una tal dimostrazione potevano risparmiarsi, e che Euclide non aveva mancato di rigore nella teorica delle parallele: » Pensons (egli dice) que cet » axiome (*) n' est dans le fond, que la converse d' une proposi-

---

(*) Castiglione prende il Postulato V. per l' assioma XI, come il Gregory.

» tion précédente. Réfléchissons a la facilitè de la déduire, au
» besoin, des propositions, qui précedent le treuteunieme. Rap-
» pellons nous les profondes connoissances qu' Euclide avoit en
» Géométrie, e le nombre d' années, qui c' est ecoulè sans qu'il
» nous soit restè quelche réclamation contre cet axiome. Faisons
» toutes ces réflexions, et nous serons portès à croire, que ce
» grand Géométre avoit trouvè le moyen d' eviter cet embarras.
» Voici comment je pense qu' il s'y etoit pris.

Il Castiglione comincia dal dire, ch' è conseguenza manifesta della prop. 17. del Libro I, che: *Se due linee rette esistenti nel medesimo piano, segate da una terza fanno con questa gli angoli interiori dalle stesse parti minori di due retti, è possibile che queste due linee rette prolungate s' incontrino da quelle parti ove gli angoli sono minori di due retti*; mentre è possibile ch' esse sieno parti di due lati di un triangolo. E questo è vero. Ciò premesso, ecco in qual modo egli passa a dimostrare la

PROPOSIZIONE XXIX.

DEL LIB. I. DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

Quella linea retta che cade sopra due linee rette parallele forma gli angoli alterni uguali, ec.

Perchè se l'angolo AGH [*Tav.*II.*fig.*29.] non è uguale all' alterno GHD delle parallele AB, CD, sia quello maggiore di questo: ed aggiuntovi di comune l' angolo BGH, gli angoli AGH, BGH sono maggiori degli altri BGH, GHD. Ma gli angoli AGH, BGH sono uguali a due retti; e quindi, per quello che poc'anzi si è detto, *sarà possibile* che le AB, CD s'incontrino. Lo che è impossibile.

Egli dopo ciò fa osservare che in questa dimostrazione, che ha lo stesso andamento di quella che trovasi nel testo greco, non

si è fatto altro che cambiare la voce *s' incontrino* nell' altra *è possibile che s' incontrino*; ed entra in una discussione erudita, per vedere se mai le voci greche esprimenti questa, forse potevano al tempo di Tolomeo figlio di Lago, esprimere ugualmente sì l'una, che l' altra cosa. Ma senza andar più oltre intorno a ciò, a me pare che il Castiglione, geometra dottissimo ed assai versato nella Geometria degli antichi, abbia preso l' equivoco di assumer per vero quello che doveva dimostrarsi; poichè gli si potrebbe rispondere, che le linee rette supponendosi parallele, tuttochè formino colla terza che le intersega gli angoli interiori minori di due retti; pur tuttavia questi non cadono nel caso di due angoli di un qualunque triangolo; ma solamente in que'casi, ne' quali, non ostante quella condizione, le due linee rette non possono mai incontrarsi.

Errata.

Pag.	Vers.		correggasi
5	19	AB	CB
6	2	(*post.* 1.)	(*prop.* 1.)
7	30	(*ass.* 6.)	(*ass.* 8.)
	31	(*post.* 8.)	*si cancelli*
9	3	ABC	ABG
12	3	(*post.* 3.)	(*prop.* 3.)
13	14	CD	CE
36	8	AC	AD
38	18	TEOREMA	PROBLEMA
41	21	FHG	KHG
44	15	DBGE	DBCE
51	14	CG	CB
54	1	GN	KN
59	2	FB	FK
	3	FK	FG
62	1	CD	BD
71	11	DG	DH
	31	EL	DL
74	21	da	la
75	7	B, E, D,	B, D
86	5	ADB	DAB
94	17	TEOREMA	PROBLEMA
95	28	quadrato di FA	quadrato di FB, ossia di FA
107	6	BC, AD	AC, BD
108	18	GH	GK
117	29	dato	lato
158	3	base	alla base
159		*Alla prop. II. corrisponde la fig.* 141.	
	20	BCE	BDE
168	29	B	E
178	*ult*	(1. VI)	(*def.* 1. VI.)
181	19	PROBLEMA	TEOREMA - *Lo stesso per le Prop.* XXIX e XXXI.
186	13	CF	GF
191	13	(*fig.* 170. *n.* 1. 2.)	(*fig* 170. *n.* 1.)

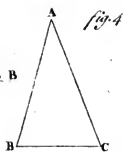
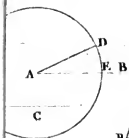
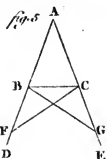
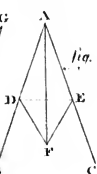
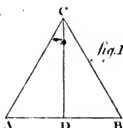



fig. 4
fig. 5
fig. 8
fig. 9
fig. 10
fig. 13
fig. 14
fig. 15
fig. 19
fig. 20
fig. 21

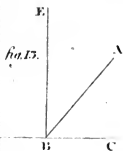
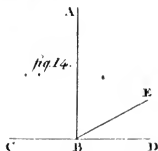
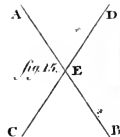
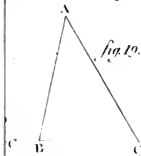
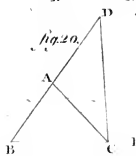
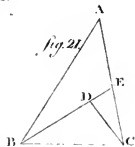
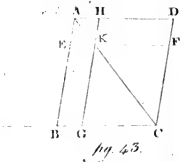
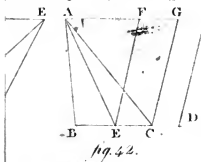
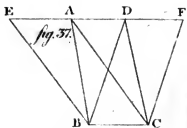
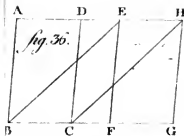
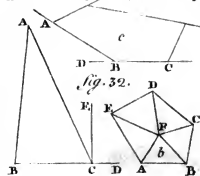
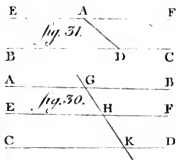
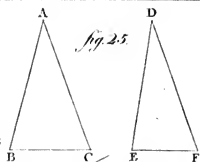
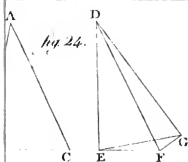
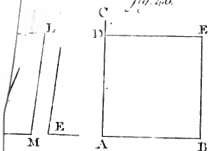
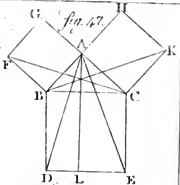
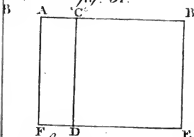



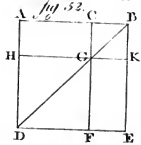
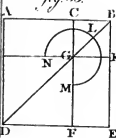
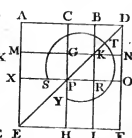
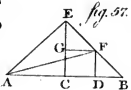
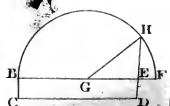
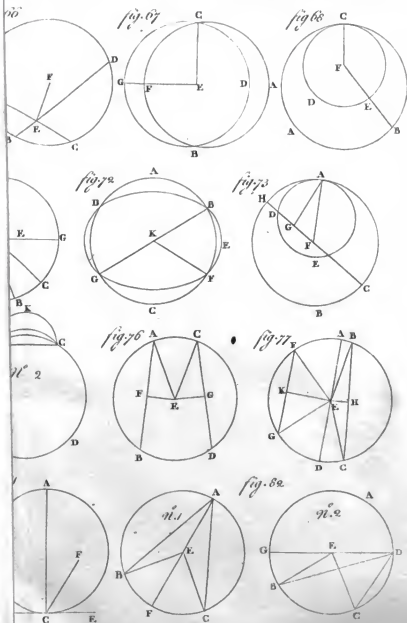
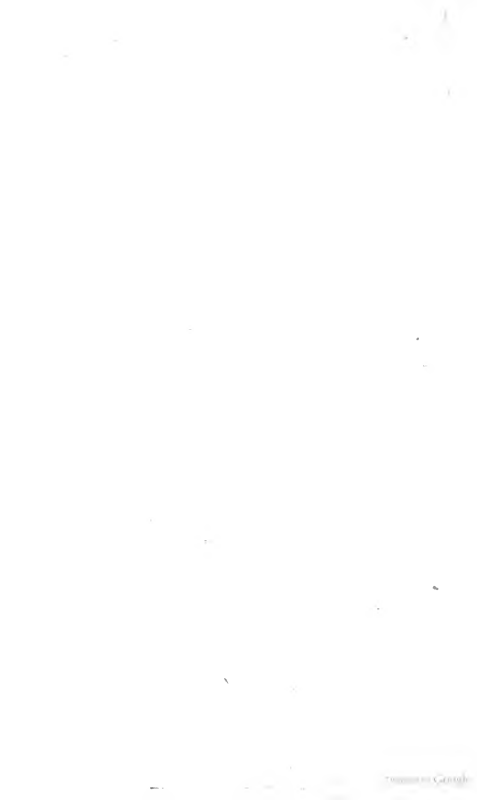
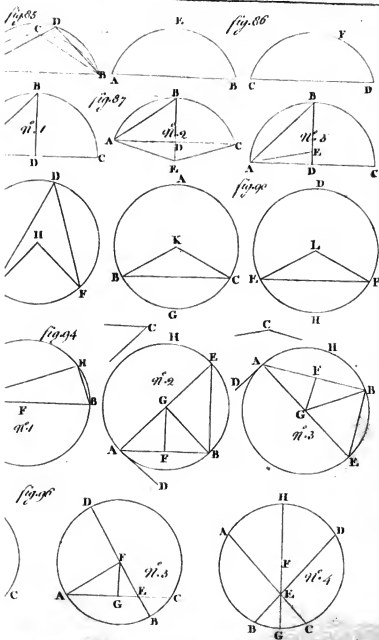
fig. 46.
fig. 47.
fig. 51.
fig. 52.
fig. 55.
fig. 56.
fig. 57.
fig. 61.
fig. 62.

Geom. Piana Tav. IV

fig.85
fig.86
fig.87
n.º 1
n.º 2
n.º 3
fig.90
fig.94
n.º 1
n.º 2
n.º 3
fig.96
n.º 3
n.º 4

fig. 99

fig. 100

fig. 103

N.° 2.

N.° 3

fig. 104

fig. 108

fig. 109

fig. 113

fig. 114

fig. 143.

fig. 144.

fig. 146.

fig. 147.

fig. 148.

fig. 152.

fig. 153.

fig. 154.

fig. 157

fig. 158

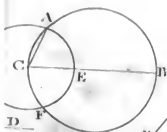
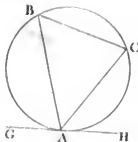
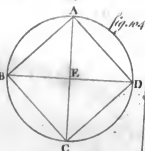
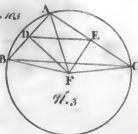
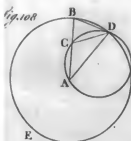
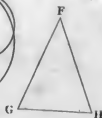
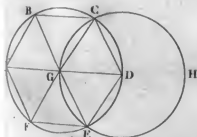
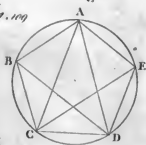
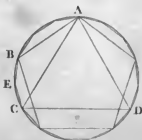
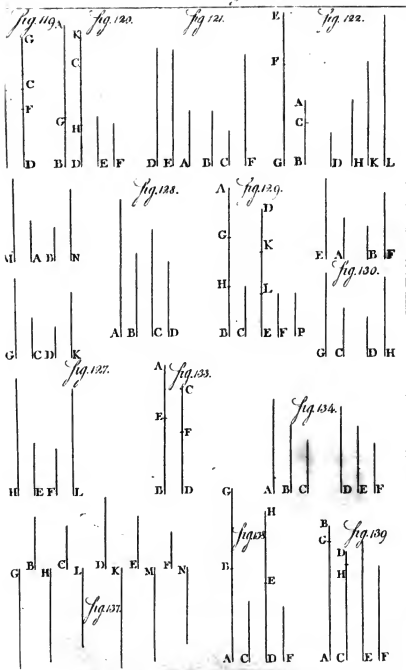
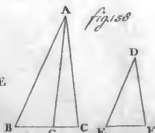
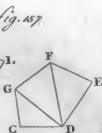
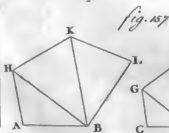
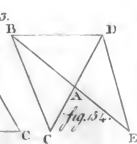
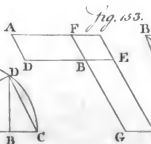
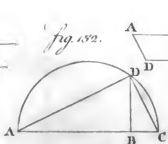
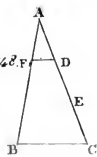
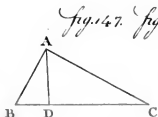
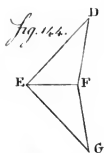
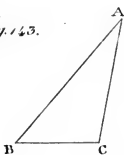
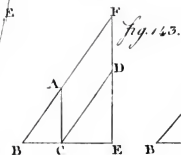
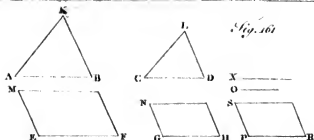
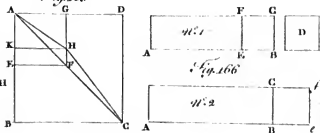
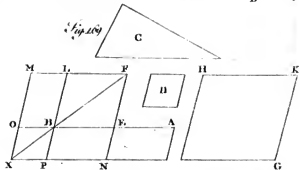



Fig. 161
Fig. 164
Fig. 165
Fig. 166
N.° 1
N.° 2
Fig. 169
Fig. 173

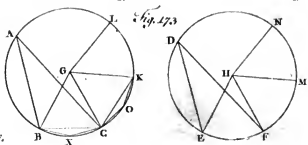
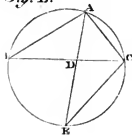
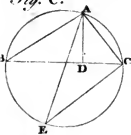
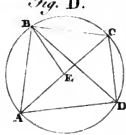



Fig. B.
Fig. C.
Fig. D.
razione
el
di Euclide
Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 9.